詳細解答

STEP II 1998，第 5 題

純數學 • 複數的三角不等式

STEP II 1998，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/98-s2-q5

關鍵思路

$|z_1 - z_2|$ 是阿根圖（Argand diagram）上兩點之間的距離，所以關於 $|z_1 + z_2|$ 的不等式，其實就是說三角形的任何一邊都不會比另外兩邊之和更長。把這個結果推廣到 n 項之後，最後一部分只需用每一項的模（modulus）來估計該項的大小，再認出一個等比級數（geometric series）：$|z|$ 太小的話，左邊就小得永遠達不到 1。

解答

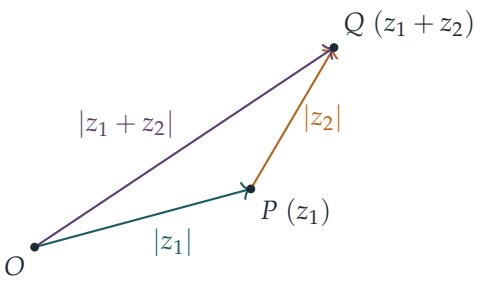
模、距離與三角不等式

若 $z = x + \mathrm{i}y$，其中 x, y 為實數，則 z 的模為

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

即原點到代表 z 的點 (x, y) 的距離。若 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 及 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，則 $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$，這正是代表 z_1 和 z_2 的兩點之間的距離。

現在設 O、P 和 Q 分別為代表 0、z_1 和 $z_1 + z_2$ 的點。



根據上述的幾何解釋，

$$OP = |z_1 - 0| = |z_1|, \qquad PQ = |(z_1 + z_2) - z_1| = |z_2|, \qquad OQ = |z_1 + z_2|.$$

直線段 OQ 是由 O 到 Q 的最短路徑，所以它不會比路徑 $O \to P \to Q$ 更長；即 $OQ \le OP + PQ$，而等號成立當且僅當 P 位於線段 OQ 上（包括各點重合的退化情況）。因此

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

這就是三角不等式（triangle inequality）。

n 項的不等式

我們用歸納法（induction）證明：對所有 $n \ge 1$ 及所有複數 $z_1, \ldots, z_n$，

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

當 $n = 1$ 時，兩邊都等於 $|z_1|$。假設結果對某個 $n = k \ge 1$ 成立。給定 $z_1, \ldots, z_{k+1}$，把兩項的不等式應用於 $w = z_1 + \cdots + z_k$ 和 z_{k+1} 這兩個複數：

$$\begin{aligned} |z_1 + \cdots + z_k + z_{k+1}| = |w + z_{k+1}| &\le |w| + |z_{k+1}| \\ &\le |z_1| + \cdots + |z_k| + |z_{k+1}|, \end{aligned}$$

其中最後一步用了歸納假設（inductive hypothesis）。所以結果對 $n = k + 1$ 成立，由歸納法可知它對所有 $n \ge 1$ 都成立。

最後一部分

假設 $|z| \le \frac{1}{4}$，並記 $r = |z|$，於是 $0 \le r \le \frac{1}{4}$。每一項都滿足 $|a_k z^k| = |a_k|\,|z|^k \le 3r^k$，所以由 n 項的不等式可得

$$\begin{aligned} |a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n| &\le |a_1|\, r + |a_2|\, r^2 + \cdots + |a_n|\, r^n \\ &\le 3(r + r^2 + \cdots + r^n). \end{aligned}$$

> **想一想** 怎樣把 $3(r + r^2 + \cdots + r^n)$ 化成可以與 1 比較的形式？又怎樣確保不等式是嚴格（strict）的？

這是一個有限等比級數，而由於 $r \le \frac{1}{4} < 1$，我們可以使用求和公式：

$$3(r + r^2 + \cdots + r^n) = \frac{3r(1 - r^n)}{1 - r}.$$

若 $r = 0$，上式等於 0。若 $0 < r \le \frac{1}{4}$，則 $0 < 1 - r^n < 1$，所以

$$\frac{3r(1 - r^n)}{1 - r} < \frac{3r}{1 - r} \le \frac{3 \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = 1,$$

其中最後一步成立，是因為 $\dfrac{3r}{1-r}$ 在 $[0,1)$ 上隨 r 遞增（分子遞增，而取正值的分母遞減）。無論是哪一種情況，都有

$$|a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n| < 1,$$

所以左邊不可能等於 1。因此方程沒有滿足 $|z| \le \frac{1}{4}$ 的解。

驗算

- 這個界是最佳的：取每個 $a_k = 3$ 及 $z = \frac{1}{4}$，左邊就是 $3\left(\frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^n}\right) = 1 - 4^{-n}$，例如當 $n = 1, 2, 3$ 時分別為 0.75、0.9375、0.984375。它可以任意接近 1，卻永遠達不到，這正是嚴格不等式如此重要的原因。
- 在一次隨機測試中，我們選取了 200 000 組數據，其中 $n \le 15$、a_k 滿足 $|a_k| \le 3$、z 滿足 $|z| \le \frac{1}{4}$，所得 $|a_1z + \cdots + a_nz^n|$ 的最大值約為 0.996，始終小於 1。

常見錯誤

- 單靠無窮級數之和 $3r/(1-r) \le 1$，只能得出 $|\text{左邊}| \le 1$，這並不足以排除方程有解的可能。嚴格不等式要靠有限項之和（或者 $r > 0$ 時 $r^n > 0$ 這個事實）才能得到。
- 在歸納法中，兩項的不等式必須應用於 $z_1 + \cdots + z_k$，並把它視為單一個複數；這正是該步驟的關鍵所在。

STEP 之外

三角不等式是度量（metric）的定義性質，而 $|z_1 - z_2|$ 令 $\mathbb{C}$ 成為一個度量空間（metric space）；分析學中幾乎每一個關於收斂的論證都建基於它。最後一部分是一類定理的入門版本，這類定理用來確定多項式和冪級數（power series）的零點（zeros）位置：這裏 $f(z) = a_1z + \cdots + a_nz^n - 1$ 在圓盤 $|z| \le \frac{1}{4}$ 內沒有零點，與儒歇定理（Rouché's theorem）的精神一脈相承。想了解複數的幾何，可讀 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以圖像闡釋複分析）；想了解分析學中的度量概念，可讀 Abbott 的 *Understanding Analysis*（實分析入門）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。