詳細解答

STEP II 1998，第 4 題

純數學 • 分部積分法

> **STEP II 1998，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q4

關鍵思路

那個棘手的因子 $\operatorname{cosec}(x/2)$ 無法直接積分，但相鄰兩個被積函數（integrand）之差卻好處理得多：正弦的差化積公式會產生一個因子 $\sin(x/2)$，剛好把餘割完全約去。剩下的是多項式乘以餘弦，用分部積分法（integration by parts）便可按標準做法處理。然後把這些差逐項相消（telescope），最終歸結到一個可以直接手算的初始值。

解答

差 $I_n - I_{n-1}$

由於 $nx + x/2 = (n + \frac{1}{2})x$，兩個被積函數之差為

$$\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\left[\sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin(n-\tfrac{1}{2})x\right]\operatorname{cosec}\tfrac{x}{2}.$$

根據和差化積公式（factor formula）$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$，取 $\frac{A+B}{2} = nx$ 及 $\frac{A-B}{2} = \frac{x}{2}$，得

$$\sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin(n-\tfrac{1}{2})x = 2\cos nx\,\sin\tfrac{x}{2}.$$

$\sin\frac{x}{2}$ 與餘割互相約去，所以

$$I_n - I_{n-1} = 2\int_0^{\pi}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

> **想一想** 在 $x = 0$ 處 $\operatorname{cosec}(x/2)$ 為無窮大，這樣約去是否合理？

合理。每個原來的被積函數在 $x \to 0$ 時都有有限的極限，因為 $\sin(n+\frac{1}{2})x \big/ \sin\frac{x}{2} \to$

$2n+1$，所以這些積分都是再普通不過的積分。當 $0 < x \le \pi$ 時，約去只是嚴格的代數運算，而只在 $x = 0$ 這一點改變被積函數的值，並不會改變積分的值。

現在用分部積分法，取 $u = \frac{\pi}{2} - x$ 及 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \cos nx$，於是 $v = \frac{1}{n}\sin nx$（因 $n \ge 1$，故成立）：

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)\cos nx\,\mathrm{d}x &= \left[\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{1}{n}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1-\cos n\pi}{n^2} = \frac{1-(-1)^n}{n^2},\end{aligned}$$

其中邊界項為零，因為 $\sin 0 = \sin n\pi = 0$。因此

$$I_n - I_{n-1} = \frac{2(1-(-1)^n)}{n^2} = \begin{cases}\dfrac{4}{n^2}, & n \text{ 為奇數},\\ 0, & n \text{ 為偶數}.\end{cases}$$

求 I_n 的值

要逐項相消，我們需要一個初始值。這個積分同樣可以用來定義 I_0：當 $n = 0$ 時，被積函數是 $(\frac{\pi}{2} - x)\sin\frac{x}{2}\operatorname{cosec}\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - x$，所以

$$I_0 = \int_0^{\pi}\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{\pi}{2}x - \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi} = 0,$$

而上面的差公式對 $n = 1$ 也成立（推導過程只用到 $n \ge 1$）。把 $1, 2, \ldots, n$ 各項的差相加：

$$I_n = I_0 + \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{2(1-(-1)^k)}{k^2}.$$

只有奇數的 k 才有貢獻，每項為 $4/k^2$，所以

$$\boxed{I_n = 4\sum_{\substack{k=1\\ k\text{ 為奇數}}}^{n}\frac{1}{k^2} = 4\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right),}$$

若 n 為奇數，最後一項是 $1/n^2$；若 n 為偶數，最後一項是 $1/(n-1)^2$。等價地，$I_n = 4\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{(2r-1)^2}$，其中 $m = \lceil n/2\rceil$。

如果你對使用 $n = 0$ 感到不安（題目說明 n 是正數），可以改由 I_1 開始。由於 $\sin\frac{3x}{2} = \sin\frac{x}{2}(1 + 2\cos x)$，利用上面 $n = 1$ 時的分部積分結果，可得 $I_1 = \int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2} - x)(1 + 2\cos x)\,\mathrm{d}x = 0 + 2\cdot 2 = 4$。這與公式吻合。

驗算

- $I_1 = I_2 = 4$ 及 $I_3 = I_4 = 4 + \frac{4}{9} = \frac{40}{9} \approx 4.4444$。對原來的積分使用辛普森法則（Simpson's rule）（在 $x = 0$ 處取被積函數的極限 $\frac{\pi}{2}(2n+1)$），算得 I_3 為 $4.444444\ldots$，而且對每個 $n \le 12$，結果與上述和式的誤差都在 10^{-8} 之內。

- 對應 n 的被積函數是 $\frac{\pi}{2} - x$ 乘以 $1 + 2\cos x + \cdots + 2\cos nx$，而 $\frac{\pi}{2} - x$ 關於 $x = \frac{\pi}{2}$ 是奇函數。當 k 為偶數時（常數 1 亦然），$\cos kx$ 關於 $x = \frac{\pi}{2}$ 是偶函數，所以乘積是奇函數，在 $[0, \pi]$ 上的積分為零。這就是 $I_0 = 0$ 以及偶數 k 沒有任何貢獻的原因。

常見錯誤

- 把正弦差化積公式中的正負號或因子 2 弄錯；可代入一組數值檢驗，例如 $x = \pi$, $n = 1$。
- 把 $\cos n\pi = 1$ 寫了出來，而沒有寫成 $(-1)^n$，結果令每一個差都變成零。
- 忘記初始值，或把答案寫成對所有 k 求和，而沒有留意到偶數項全部為零。

STEP 之外

函數 $\sin(n + \frac{1}{2})x \big/ \sin\frac{x}{2} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ 稱為狄利克雷核（*Dirichlet kernel*），是證明傅立葉級數（Fourier series）收斂的核心工具。當 $n \to \infty$ 時，我們的和趨向 $4 \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{2}$，這裏用到 $\sum_{\text{奇數}k} 1/k^2 = \pi^2/8$，它是歐拉（Euler）的 $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$ 的近親（數值上，$I_{200} \approx 4.925$，而 $\pi^2/2 \approx 4.935$）。關於傅立葉級數和這類和式，Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（常微分方程入門教材）有很好的講解；至於收斂性背後的分析學，可參考 Abbott 的 *Understanding Analysis*（數學分析入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。