詳細解答

STEP II 1998，第 3 題

純數學 • 裂項相消級數

> **STEP II 1998，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q3

關鍵思路

通項的分母若是幾個連續因子的乘積，自然應該把它拆成部分分式（partial fractions）。拆開後的各項會在求和時互相抵消，即所謂裂項相消（telescoping），最後只剩下首尾兩端的幾項。在第二部分，題目給出比值 a_n/a_{n-1}，這表示 a_n/a_1 是一連串比值的乘積，而這個乘積同樣可以逐項相消。運氣好的話，a_n 會變回第一部分的級數（series），而事實正是如此。

解答

和 S_N

設

$$\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}.$$

利用掩蓋法（cover-up rule）：取 $n=0$，得 $A = \frac{-1}{1\cdot 2} = -\frac{1}{2}$；取 $n=-1$，得 $B = \frac{-3}{(-1)(1)} = 3$；取 $n=-2$，得 $C = \frac{-5}{(-2)(-1)} = -\frac{5}{2}$。因此

$$\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{2n} + \frac{3}{n+1} - \frac{5}{2(n+2)}.$$

留意 $A+B+C=0$。正因如此，這個和才可以裂項相消。

設 $H_N = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}$。則

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = H_N - 1 + \frac{1}{N+1}, \qquad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} = H_N - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}.$$

於是

$$\begin{aligned} S_N &= -\tfrac{1}{2}H_N + 3\left(H_N - 1 + \frac{1}{N+1}\right) - \tfrac{5}{2}\left(H_N - \tfrac{3}{2} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right) \\ &= \left(-\tfrac{1}{2} + 3 - \tfrac{5}{2}\right)H_N + \left(-3 + \tfrac{15}{4}\right) + \left(3 - \tfrac{5}{2}\right)\frac{1}{N+1} - \frac{5}{2(N+2)} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2(N+1)} - \frac{5}{2(N+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{N+1} - \frac{5}{N+2}\right), \end{aligned}$$

這正是所需的結果。由於 $A + B + C = 0$，H_N 的係數為零。

當 $N \to \infty$ 時，$\frac{1}{N+1}$ 和 $\frac{5}{N+2}$ 都趨向 0，所以

$$S_N \to \frac{3}{4}.$$

數列 a_n

對於 $n \geq 2$，把題目給出的比值逐個相乘：

$$\frac{a_n}{a_1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+2} \times \prod_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{2k-3}.$$

想一想 這兩個乘積可以怎樣化簡？

把它們逐項寫出來。第二個乘積可以直接相消，因為每一項的分子都與下一項的分母約去：

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{2k-3} = \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{5} \cdots \frac{2n-1}{2n-3} = 2n - 1.$$

在第一個乘積中，分子依次為 $1, 2, \ldots, n-1$，分母依次為 $4, 5, \ldots, n+2$。由 4 至 $n-1$ 的所有因子全部約去，所以

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+2} = \frac{(n-1)!}{(n+2)!/3!} = \frac{6}{n(n+1)(n+2)}.$$

這個階乘（factorial）形式對所有 $n \geq 2$ 都成立，即使 $n < 5$、根本沒有因子可約時亦然。因此

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{6(2n-1)}{n(n+1)(n+2)}.$$

當 $n = 1$ 時，右邊等於 $\frac{6}{6} = 1$，所以這條公式對所有 $n \geq 1$ 都成立。作為驗算，取 $n = 2$ 得 $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$，與題目給出的比值 $\frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 1}$ 吻合。

當 $a_1 = \frac{2}{9}$ 時，

$$a_n = \frac{2}{9} \cdot \frac{6(2n-1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}.$$

所以 a_n 是第一個級數第 n 項的 $\frac{4}{3}$ 倍。它的部分和（partial sums）為 $\frac{4}{3}S_N \to \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}$，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$$

驗算

- $N=1$：公式給出 $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{6}$，正是首項 $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}$。$N=2$ 給出 $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{4}\right)=\frac{7}{24}=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$。兩者皆正確。
- 數值上，首 1999 項之和為 0.74900…，從下方趨近 $\frac{3}{4}$，與公式的預測一致（$S_N\approx\frac{3}{4}-\frac{2}{N}$）。
- 取 $a_1=\frac{2}{9}$，由遞推關係（recurrence）逐項算出 a_n，首 299 項之和為 0.9911…。餘下的尾項之和約為 $\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{300}\approx0.009$，與總和為 1 相符。

常見錯誤

- 處理裂項相消的首尾兩端時出錯。像上面那樣用 H_N 來表示，就能把各項算得清清楚楚。
- 階乘乘積錯了一位。約分之前，先把開頭和結尾的幾個因子寫出來。
- 忘記檢查 a_n/a_1 的公式在 $n=1$ 時是否也成立，此時乘積是空的。

STEP 之外

裂項相消是微積分基本定理（fundamental theorem of calculus）的離散版本：$\sum(f(n+1)-f(n))=f(N+1)-f(1)$，正如 $\int f'=f(b)-f(a)$。第二部分的數列是一個超幾何（hypergeometric）數列，即相鄰兩項之比是 n 的有理函數（rational function）。Gosper 演算法（Gosper's algorithm）能夠準確判定這類和何時具有閉合形式（closed form），電腦代數系統正是用這個方法來求級數之和。至於部分和極限的分析，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。