詳細解答

STEP II 1998，第 2 題

純數學 • 二項式級數近似

STEP II 1998，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/98-s2-q2

關鍵思路

二項式級數（binomial series）在變量很小時收斂（converge）得很快，所以我們希望把 $\sqrt{2}$（或 $\sqrt[3]{2}$）寫成一個簡單的有理數乘以 $(1+x)^a$，而其中的 x 極小。就平方根而言，$49/50$ 與 1 只差一點，而且含有因數 2；就立方根而言，我們要找一個幾乎等於 $2\times$ 另一個立方數的立方數，而 $128 = 2\times 4^3$ 正好緊貼着 $125 = 5^3$。

解答

2 的平方根

首先，我們把題目給出的式子與 $\sqrt{2}$ 聯繫起來。由於 $1-\frac{1}{50} = \frac{49}{50}$，

$$\left(1-\frac{1}{50}\right)^{1/2} = \frac{7}{\sqrt{50}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt{2} = \frac{10}{7}\left(1-\frac{1}{50}\right)^{1/2}.$$

$(1+x)^{1/2}$ 的二項式級數的首幾項為

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \cdots,$$

對 $|x|<1$ 成立。設 $x = -\frac{2}{100} = -2y$，其中 $y = \frac{1}{100}$。2 的冪剛好可以約去：

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{2}{100}\right)^{1/2} &\approx 1 - \tfrac{1}{2}(2y) - \tfrac{1}{8}(2y)^2 - \tfrac{1}{16}(2y)^3 \\ &= 1 - y - \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{2}y^3 \\ &= 1 - 0.01 - 0.00005 - 0.0000005 \\ &= 0.9899495.\end{aligned}$$

這就是把 1/50 寫成 2/100 的好處：每一項都變成 10 的冪乘以 1 或 $\frac{1}{2}$，所以運算全是精確的小數。

因此

$$\sqrt{2} \approx \frac{10 \times 0.9899495}{7} = \frac{9.899495}{7} = 1.41421357\ldots,$$

準確至小數點後六位，$\sqrt{2} \approx 1.414214$，正如題目所求。

2 的立方根

> ? **想一想** 應取哪個 N 和 a？怎樣才能令 $(1+N/125)^a$ 與 $\sqrt[3]{2}$ 扯上關係？

由於 $125 = 5^3$，$(125+N)/125$ 的立方根就是 $\sqrt[3]{125+N}/5$。因此我們希望 $125+N$ 是某個完全立方數（perfect cube）的 2 倍，而且 N 要小。從 2×1^3, 2×2^3, 2×3^3, $2\times 4^3 = 2, 16, 54, 128$ 可見，128 與 125 只相差 3。所以取 $N=3$ 和 $a=\frac{1}{3}$：

$$\left(1+\frac{3}{125}\right)^{1/3} = \frac{\sqrt[3]{128}}{5} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{5}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt[3]{2} = \frac{5}{4}\left(1+\frac{3}{125}\right)^{1/3}.$$

$(1+x)^{1/3}$ 的二項式級數的首幾項為

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \tfrac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}x^3 + \cdots = 1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{9}x^2 + \tfrac{5}{81}x^3 - \cdots.$$

和之前一樣，作一個代換（substitution）便可令運算變得簡潔。設 $x = 3y$，其中 $y = \frac{1}{125} = 0.008$；於是 $\frac{1}{3}x = y$、$\frac{1}{9}x^2 = y^2$ 及 $\frac{5}{81}x^3 = \frac{5}{3}y^3$。所以

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{3}{125}\right)^{1/3} &\approx 1 + y - y^2 + \tfrac{5}{3}y^3 \\ &= 1 + 0.008 - 0.000064 + \tfrac{5}{3}(0.000000512) \\ &= 1.007936 + 0.00000085333\ldots \\ &= 1.00793685333\ldots.\end{aligned}$$

乘以 $\frac{5}{4}$，得

$$\sqrt[3]{2} \approx 1.25 \times 1.00793685333\ldots = 1.25992106\ldots,$$

所以準確至小數點後六位，$\sqrt[3]{2} \approx 1.259921$。

驗算

計算機給出 $\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$ 和 $\sqrt[3]{2} = 1.25992105\ldots$，所以兩個近似值都準確至小數點後六位；我們求得的值是 1.41421357 和 1.25992107。我們已用電腦以精確分數核對過這兩個級數。從第一個被略去的項可以大致看出誤差的大小：$-\frac{5}{128}x^4$ 對 $\sqrt{2}$ 的估值貢獻約 -9×10^{-9}，而 $-\frac{10}{243}x^4$ 對 $\sqrt[3]{2}$ 的估值貢獻約 -1.7×10^{-8}。兩者都遠小於足以改變小數點後第六位的 5×10^{-7}。

常見錯誤

- 忘記還原縮放的倍數：級數給出的是 $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ 和 $\frac{4\sqrt[3]{2}}{5}$，而不是 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt[3]{2}$ 本身。
- 級數中的正負號出錯。在第一部分中 x 是負數，所以 1 之後的四項全是負的。在第二部分中，正負號則交替出現。
- 太早捨入。在最後一步除法或乘法之前，應至少保留八位小數。

STEP 之外

這道題的背後是帶餘項的泰勒定理（Taylor's theorem），它把「下一項極小」這個說法變成對誤差的嚴格界限。它解釋了為何一個公比約為 0.02 的級數，每多取一項便大約多得一位半至兩位小數的準確度。同一個技巧，即找一個有理數 p/q 使 p^n/q^n 接近目標數的某個簡單倍數，與數論中的連分數（continued fractions）和有理逼近（rational approximation）息息相關。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（數論入門名著）是閱讀這些課題的好去處，而 Abbott 的 *Understanding Analysis*（數學分析入門教材）則仔細講解了泰勒餘項。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。