詳細解答

STEP II 1998，第 14 題

概率與統計 • 二項分佈與泊松分佈的期望值

STEP II 1998，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/98-s2-q14

關鍵思路

雖然資料庫把這題另作歸類，但它其實是一道概率（probability）題：只要 Doom 博士在新方案下的期望薪金高於固定薪金 A，她就應該接受新方案。不合格人數服從二項分佈（binomial distribution），所以我們需要求 $\mathrm{E}[1/(1+X)]$。棘手的因子 $\frac{1}{k+1}$ 可以用恆等式 $\frac{1}{k+1}\binom{N}{k} = \frac{1}{N+1}\binom{N+1}{k+1}$ 吸收掉，於是該和式就變成 $(p+q)^{N+1}$ 幾乎完整的二項展開式。同樣的技巧配合 $\frac{\lambda^k}{(k+1)!}$，便可處理泊松（Poisson）模型。

解答

何時接受新方案

設 X 為 Doom 博士的學生中不合格的人數，並記 $q = 1 - p$。各學生是否不合格互相獨立（independent），每人不合格的概率均為 p，所以 $X \sim \mathrm{B}(N, p)$：

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N.$$

我們假設 Doom 博士願意以期望薪金來衡量兩個方案。在新方案下，她的薪金是隨機變量（random variable）$S = B/(1+X)$，所以

$$\mathrm{E}(S) = B \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k+1} \binom{N}{k} p^k q^{N-k}.$$

? **想一想** 怎樣消去和式中的 $\frac{1}{k+1}$？

利用階乘（factorial）：

$$\frac{1}{k+1}\binom{N}{k} = \frac{N!}{(k+1)!\,(N-k)!} = \frac{1}{N+1}\cdot\frac{(N+1)!}{(k+1)!\,((N+1)-(k+1))!}$$
$$= \frac{1}{N+1}\binom{N+1}{k+1}.$$

把這個結果代入，並同時乘以和除以 p，使 p 的冪次與新的二項式係數（binomial coefficient）相配，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(S) &= \frac{B}{(N+1)p}\sum_{k=0}^{N}\binom{N+1}{k+1}p^{k+1}q^{N-k}\\ &= \frac{B}{(N+1)p}\sum_{j=1}^{N+1}\binom{N+1}{j}p^{j}q^{N+1-j}\\ &= \frac{B}{(N+1)p}\left[(p+q)^{N+1}-q^{N+1}\right]\end{aligned}$$

其中先設 $j = k+1$，再運用二項式定理（binomial theorem），因為該和式正是 $(p+q)^{N+1}$ 的完整展開式，只欠 $j=0$ 的一項 q^{N+1}。由於 $p+q=1$，

$$\mathrm{E}(S) = \frac{B(1-(1-p)^{N+1})}{(N+1)p}.$$

若 $\mathrm{E}(S) > A$，她就應該接受。兩邊同乘 $(N+1)p$，而此數為正（公式要有意義，須有 $p>0$；若 $p=0$，她只需直接比較 B 與 A），便得

$$A(N+1)p < B(1-(1-p)^{N+1}),$$

這就是所求的條件。

泊松模型

當 N 很大而 p 很小，且 Np 大小適中時，二項分佈 $\mathrm{B}(N,p)$ 可以用平均值為 $\lambda = Np$ 的泊松分佈（Poisson distribution）作良好的近似。因此，如果 Doom 博士任教的班人數眾多，每名學生不合格的機會都很低，而且各人是否不合格仍然互相獨立，她的學生的不合格人數就可以用泊松分佈作模型。（更一般地說，若不合格的情況逐一出現、互相獨立，且平均發生率恆定，便適合採用泊松模型。）

設 $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$，$\lambda = Np$，同樣的想法依然可行，這次用的是 $\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{k!} = \frac{1}{(k+1)!}$：

$$\mathrm{E}\Big(\frac{B}{1+X}\Big) = B\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!} = \frac{B\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$$
$$= \frac{B\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda}-1) = \frac{B(1-\mathrm{e}^{-\lambda})}{\lambda},$$

因為最後的和式正是指數級數（exponential series），只欠首項 1。所以在這個模型下，Doom 博士的期望薪金為

$$\frac{B(1-\mathrm{e}^{-Np})}{Np} \text{ 英鎊.}$$

驗算

- $N=1$：直接計算得 $\mathrm{E}(S)=B\left(q+\frac{1}{2}p\right)=B\left(1-\frac{1}{2}p\right)$，而公式給出 $B\,\frac{1-q^2}{2p}=B\,\frac{1+q}{2}=B\left(1-\frac{1}{2}p\right)$。
- $p\to 0$：二項分佈的表達式趨向 B（沒有人不合格），而當 $\lambda\to 0$ 時，泊松分佈的表達式亦然。
- 在近似理應準確的情況下，兩個答案相當吻合：取 $N=1000$，$p=0.003$，由二項分佈公式得 $\mathrm{E}(S)/B$ 為 0.31655，由泊松公式則得 0.31674。取 $N=20$，$p=0.3$ 時，逐項精確計算與模擬的結果均為 $\mathrm{E}(S)/B\approx 0.1586$。

常見錯誤

- 寫成 $\mathrm{E}\left(\frac{1}{1+X}\right)=\frac{1}{1+\mathrm{E}(X)}=\frac{1}{1+Np}$。期望值（expectation）不能直接穿過非線性函數；事實上 $\frac{1}{1+x}$ 是凸函數（convex function），所以根據延森不等式（Jensen's inequality），真正的值比這個大。
- 忘記了重新編排指標後的和式欠了 $j=0$ 的一項，結果得出 $\mathrm{E}(S)=B/((N+1)p)$。

STEP 之外

這裏的技巧其實是一個特例：計算 $\mathrm{E}\big(1/(1+X)\big)$ 時可以利用 $\frac{1}{1+x}=\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t$，從而把它與概率生成函數（probability generating function）$G(t)=\mathrm{E}(t^X)$ 聯繫起來：答案就是 $\int_0^1 G(t)\,\mathrm{d}t$。試以 $G(t)=(q+pt)^N$ 和 $G(t)=\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$ 驗證一下。關於生成函數，以及二項分佈收斂（convergence）至泊松分佈，Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）有很好的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。