詳細解答

STEP II 1998，第 13 題

概率與統計 • 指數分佈

STEP II 1998，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/98-s2-q13

關鍵思路

第一個結果是指數分佈（exponential distribution）的無記憶性（memoryless property）：如果一次服務已經持續了時間 t，餘下所需的時間與一次全新服務的時間有相同的分佈。有了這個結果，店舖這個情境幾乎不用再作任何計算。就概率而言，服務到一半的顧客與剛剛開始接受服務的顧客並無分別。因此，在每一個關鍵時刻，仍在接受服務的人之間的競賽，都是相同而且獨立（independent）的指數時間之間的競賽。

解答

無記憶性

對於 $x \geq 0$，

$$\mathrm{P}(X > x) = \int_x^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \Big[-\mathrm{e}^{-\lambda u}\Big]_x^\infty = \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

取 $s, t \geq 0$。事件 $\{X > s+t\}$ 包含於 $\{X > t\}$ 之內，所以兩者的交集就是 $\{X > s+t\}$。根據條件概率（conditional probability）的定義，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X > s+t \mid X > t) &= \frac{\mathrm{P}(X > s+t \text{ 及 } X > t)}{\mathrm{P}(X > t)} = \frac{\mathrm{P}(X > s+t)}{\mathrm{P}(X > t)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda s} = \mathrm{P}(X > s),\end{aligned}$$

這就是所要求的結果。（我們可以作除法，是因為 $\mathrm{P}(X > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} > 0$。）

兩位顧客都仍在接受服務

模型：兩個服務時間互相獨立，而且各自服從題目所給的指數分佈。設 A 和 B 為我到達時正在接受服務的兩位顧客。

> **想一想** 顧客 A 已經接受了一段長度未知的服務。這難道不會改變他還需要多少時間的分佈嗎？

不會，而這正是第一部分告訴我們的。假設 A 的服務至今已持續了 u。那麼它最少再持續 t 的概率是

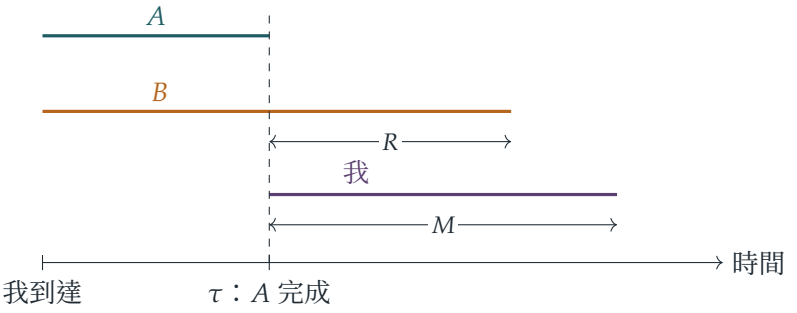
$$\mathrm{P}(X > u + t \mid X > u) = \mathrm{P}(X > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

不論 u 是多少。所以，由我走進店舖的一刻起計，A 的剩餘服務時間服從同一個參數（parameter）為 λ 的指數分佈，B 的情況亦然。由於完整的服務時間互相獨立，這兩個剩餘時間也互相獨立。因此

$$\mathrm{P}(\text{兩人均仍在接受服務，於時刻}t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^{-2\lambda t}.$$

另一位顧客完成時，我是否仍在接受服務？

假設 A 先完成，時刻為我到達後的 τ，而我隨即到 A 的店員那裏接受服務。



在時刻 τ，設 R 為 B 仍需要的時間，並設 M 為我的服務時間。

- M 服從參數為 λ 的指數分佈，因為我的服務在 τ 才重新開始。它與之前發生的一切獨立，因為不同顧客的服務時間互相獨立。
- R 同樣服從參數為 λ 的指數分佈。在時刻 τ，B 已經接受了一段時間的服務（我到達之前的時間再加上 τ），而再次根據無記憶性，剩餘時間服從原來的分佈。它與 M 獨立。

B 完成時我仍在接受服務，當且僅當 $M > R$。現在 M 和 R 互相獨立，並且有相同的連續分佈（continuous distribution），所以根據對稱性（symmetry），$\mathrm{P}(M > R) = \mathrm{P}(R >$

M)。此外，對於連續隨機變量（continuous random variables），$\mathrm{P}(M = R) = 0$，所以這兩個概率之和為 1。因此

$$\mathrm{P}(\text{另一位顧客完成時我仍在接受服務}) = \tfrac{1}{2}.$$

如果你寧願用計算而不用對稱性的論證，可以以 R 為條件：

$$\mathrm{P}(M > R) = \int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda r}\, \mathrm{P}(M > r)\, \mathrm{d}r = \int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-2\lambda r}\, \mathrm{d}r = \tfrac{1}{2}.$$

驗算

- 當 $t = 0$ 時，$\mathrm{e}^{-2\lambda t} = 1$：我到達時，兩位顧客必定都正在接受服務。當 $t \to \infty$ 時，概率趨向 0，這也是應有的結果。
- 答案 $\frac{1}{2}$ 與 λ 無關，這正如我們所料，因為改變 λ 只是改變了時間的單位。
- 以 $\lambda = 0.7$ 和 $t = 0.9$ 進行模擬，得出兩位顧客都仍在接受服務的比例為 0.2831，而 $\mathrm{e}^{-1.26} \approx 0.2837$。在另一個模擬中，兩位顧客已經各自接受了隨機長度的服務，結果我在 0.5000 比例的試驗中仍在接受服務。

常見錯誤

- 以為正在接受服務的顧客「快要完成」，所以他們的剩餘時間會較短。對指數分佈而言，已經發生的事情不會造成任何分別。
- 把 $\mathrm{P}(X > s + t \text{ 及 } X > t)$ 寫成 $\mathrm{P}(X > s + t)\, \mathrm{P}(X > t)$。這兩個事件並不獨立；其中一個包含另一個。

STEP 之外

指數分佈是唯一具有無記憶性的連續分佈。這個事實是泊松過程（Poisson process）和排隊論（queueing theory）的基礎；在排隊論中，一間有 c 位店員、服務時間服從指數分佈的店舖，就是經典的 M/M/c 隊列。兩位顧客的計算可以推廣至 n 位：n 個參數為 λ 的獨立指數變量之中的最小值，服從參數為 $n\lambda$ 的指數分佈（把尾概率相乘即可），而根據對稱性，每個變量成為最小者的可能性均等。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率入門）以這個程度講解指數變量和泊松過程。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。