詳細解答

STEP II 1998，第 12 題

概率與統計 • 貝葉斯定理

STEP II 1998，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/98-s2-q12

本題在 *Beyond STEP* 第 12.2 節基本比率謬誤中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/base-rate.html

關鍵思路

這一題是貝葉斯定理（Bayes' theorem）的兩次應用。第一部分是經典的「罕見疾病」意外：當疾病很罕見時，即使檢測相當準確，大部分陽性結果仍可能是假陽性（false positive）。至於第二部分，竅門在於看出接受 STEP 檢測的人並不是整體人口的隨機樣本。他們是 AL 陽性的那一羣人，所以第一部分的答案就成為第二次檢測的先驗概率（prior）。

解答

設 D 為某人患有 mathematitis 的事件，A 為 AL 檢測呈陽性的事件，B 為 STEP 檢測呈陽性的事件。已知

$$\mathrm{P}(D) = \tfrac{1}{100}, \qquad \mathrm{P}(A \mid D) = \tfrac{9}{10}, \qquad \mathrm{P}(A \mid D') = \tfrac{1}{11}.$$

Frankie 的概率

根據全概率公式（law of total probability），

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(A \mid D)\,\mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(A \mid D')\,\mathrm{P}(D') \\ &= \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{100} + \frac{1}{11}\cdot\frac{99}{100} = \frac{9}{1000} + \frac{9}{100} = \frac{99}{1000}.\end{aligned}$$

再根據貝葉斯定理，

$$\mathrm{P}(D \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid D)\,\mathrm{P}(D)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{9/1000}{99/1000} = \frac{1}{11}.$$

所以即使 AL 檢測結果呈陽性，Frankie 是患者的概率也只有 $\frac{1}{11}$。在 1000 人當中，約有 9 名患者檢測呈陽性，但 990 名非患者中也約有 90 人呈陽性，假陽性的數目遠遠蓋過了真陽性。

求 p

現在只考慮 AL 檢測呈陽性的人。在這一羣人之中，

$$\mathrm{P}(D \mid A) = \tfrac{1}{11}, \qquad \mathrm{P}(D' \mid A) = \tfrac{10}{11}.$$

我們把題目所給有關 STEP 的資料理解為 $\mathrm{P}(B \mid D \cap A) = 0.9$ 和 $\mathrm{P}(B \mid D' \cap A) = p$：STEP 檢測的表現只取決於該人是否患者，而與 AL 的結果無關。

> ? **想一想** 為甚麼我們不從 $\mathrm{P}(D) = \frac{1}{100}$ 重新開始？

因為只有 AL 呈陽性的人才會接受 STEP 檢測，而在這一羣人之中，患者所佔的比例已不再是 1%，而是 $\frac{1}{11}$，這正是第一部分求得的結果。第一次檢測的後驗概率（posterior）成為第二次檢測的先驗概率。

在 AL 陽性的一羣人之中，

$$\mathrm{P}(D \cap B \mid A) = \frac{1}{11} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{110},$$
$$\mathrm{P}(D' \cap B \mid A) = \frac{10}{11} \cdot p = \frac{10p}{11}.$$

題目告訴我們，兩項檢測皆呈陽性的人當中有一半是患者，即 $\mathrm{P}(D \mid A \cap B) = \frac{1}{2}$。這表示上面兩個概率相等：

$$\frac{9}{110} = \frac{10p}{11} \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{9}{100} = 0.09.$$

驗算

- 賠率形式（odds form）：患病的先驗賠率為 1 : 99。AL 把它乘以 $\frac{0.9}{1/11} = 9.9$，得 $9.9 : 99 = 1 : 10$，與 $\frac{1}{11}$ 吻合。要使賠率達到 1 : 1，STEP 必須把它乘以 10，所以 $\frac{0.9}{p} = 10$，即 $p = 0.09$。
- 模擬二百萬人先後接受兩項檢測（取 $p = 0.09$），結果 AL 陽性者當中患者所佔的比例為 0.0909，而兩項檢測皆呈陽性者當中患者所佔的比例為 0.5003。

常見錯誤

- 以 $\mathrm{P}(D) = 0.01$ 作為 STEP 檢測的先驗概率，這樣會得出 $p = 0.0009$，比正確答案小了一百倍。
- 把 $\mathrm{P}(A \mid D) = 0.9$ 與 $\mathrm{P}(D \mid A)$ 混淆。第一部分的重點正正在於這兩者相差甚遠。

STEP 之外

把貝葉斯定理寫成賠率形式，即後驗賠率等於先驗賠率乘以似然比（likelihood ratio），連續檢測的計算就變得近乎機械化：每一項獨立的證據只不過是把賠率乘以它自己的因子。這是貝葉斯推論（Bayesian inference）的基礎，也是現實中設計醫學篩查計劃的依據。我們所作的假設，即在給定患病狀況下各項檢測條件獨立（conditionally independent），與「樸素貝葉斯」（naive Bayes）分類器背後的假設相同。Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率論入門教科書）對條件概率和貝葉斯法則有極佳的講解，並附有許多與本題類似的例子。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。