詳細解答

STEP II 1998，第 11 題

力學 • 拋體運動

STEP II 1998，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/98-s2-q11

本題在 *Beyond STEP* 第 11.11 節外野手如何接球中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/fielders.html

關鍵思路

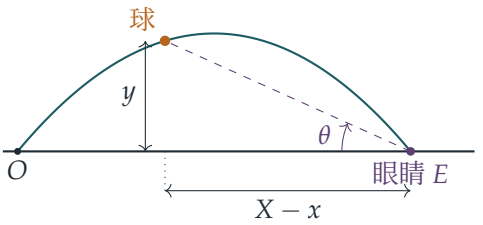
把原點設在擊球點，並取其高度為眼睛的高度，然後把 $\tan\theta$ 寫成「球的高度除以球與外野手眼睛之間的水平距離」。一個由眼睛高度出發、最後又回到眼睛高度的拋體（projectile），其高度可以因式分解為 $\frac{1}{2}g\,t(T-t)$，其中 T 是飛行時間（time of flight）；而如果外野手最後身處正確的位置，水平距離同樣是 $T-t$ 的倍數。因子 $T-t$ 互相約去，餘下的 $\tan\theta$ 便與 t 成正比。

解答

我們把球視為只受重力作用（沒有空氣阻力（air resistance））的質點（particle），並把外野手的眼睛視為一個與擊球點等高的點。取 x 軸為水平方向，由擊球點 O 指向外野手，y 軸鉛垂向上。設球的初速度的水平分量為 $U>0$，鉛垂分量為 $W>0$。那麼在時刻 t

$$x = Ut, \qquad y = Wt - \tfrac{1}{2}gt^2 = \tfrac{1}{2}g\,t\,(T-t), \qquad \text{其中} T = \frac{2W}{g}$$

是球回到眼睛高度的時刻。



如果外野手的眼睛位於水平位置 X（球在飛行期間有 $X > x$），視線（line of sight）便與水平線成仰角 θ，其中

$$\tan\theta = \frac{y}{X-x}.$$

站立不動的外野手

「位置恰到好處」的意思是球剛好飛到她的眼睛：她的眼睛位於球回到眼睛高度的那一點，即 $X = UT$。於是當 $0 < t < T$ 時

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{UT-Ut} = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{U(T-t)} = \frac{g}{2U}t,$$

這裏約去了 $T-t$，因為球在飛行期間它不等於零。因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta) = \frac{g}{2U},$$

這是一個常數，正是所求。（在接球前的一刻，$\tan\theta \to gT/(2U) = W/U$：她看見球飛來的角度，恰好就是球被擊出時的角度，這與拋物線的對稱性吻合。）

奔跑中的外野手

現在設下一球的速度分量為 U、W（所以同樣有 $y = \frac{1}{2}gt(T-t)$，其中 $T = 2W/g$），並設外野手在球被擊出的一刻與 O 相距 D，然後以恆速 v 跑向擊球手。她的眼睛位於 $X = D - vt$，所以

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{D-(U+v)t}. \qquad (*)$$

她能接到球，當且僅當在時刻 T 她的眼睛正好位於球回到眼睛高度的那一點，即

$$D - vT = UT \quad\Longleftrightarrow\quad D = (U+v)T.$$

我們要證明，這種情況發生當且僅當 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)$ 為常數，因此「選擇 v 使 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)$ 保持不變」確是正確的法則。

如果她選對了速率，則 $D = (U+v)T$，而 $(*)$ 變成

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{(U+v)(T-t)} = \frac{g}{2(U+v)}t, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta) = \frac{g}{2(U+v)},$$

這是一個常數，與第一部分完全一樣，只是 U 換成了球相對於她的速率 $U+v$。

想一想 這不是只完成了一半嗎？會不會有另一個 v 同樣令變化率保持不變？

不會。假設在整個飛行過程中 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta) = k$ 為常數。在 $t = 0$ 時球位於眼睛高度，所以 $\tan\theta = 0$，因而 $\tan\theta = kt$。把這個結果代入 $(*)$ 並除以 t（其中 $0 < t < T$），得

$$\tfrac{1}{2}g\,(T - t) = k\big(D - (U + v)t\big) \quad \text{對所有} t \in (0, T).$$

兩個關於 t 的線性函數如果在一個區間上相等，它們的係數必定相同，所以

$$\tfrac{1}{2}g = k(U + v) \qquad \text{及} \qquad \tfrac{1}{2}gT = kD.$$

由第一式可知 $k \neq 0$；把第二式除以第一式便得 $D = (U + v)T$，這正是接到球的條件。

所以，能把她帶到球那裏的速率 $v = D/T - U$，恰好就是令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)$ 保持不變的那個速率。實際上，球還在空中時她無法計算 $D/T - U$，但她可以觀察：如果球在她眼中上升得愈來愈快，她便站得太後，應該跑快一點；如果球看來上升得愈來愈慢，她便應該放慢腳步。（由於她是朝着擊球手跑的，球的落點比她的起始位置近，即 $D > UT$，所以 $v > 0$。）

驗算

- 在第二部分取 $v = 0$，便回到第一部分的結果：$D = UT$，變化率為 $g/(2U)$。
- 單位：g/U 的單位是 $\mathrm{m\,s^{-2}}/\mathrm{m\,s^{-1}} = \mathrm{s^{-1}}$，正好是一個純數的變化率應有的單位。
- 一個數值例子：球以 $20\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ 的速率、45° 的仰角被擊出，取 $g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$，則 $T \approx 2.886\ \mathrm{s}$，射程為 $40.82\ \mathrm{m}$；站在該處的外野手會看見 $\tan\theta$ 以 $g/(2U) \approx 0.346\ \mathrm{s^{-1}}$ 的速率增長。如果她改為從 $49.47\ \mathrm{m}$ 外起步，並以 $3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ 的速率奔跑，變化率則為 $0.286\ \mathrm{s^{-1}}$。在多個時刻對 $(*)$ 作數值求導，可確認這兩個變化率都是常數，而選錯了 v 則會得到一個不斷改變的變化率。

常見錯誤

- 從擊球手而不是從外野手的眼睛量度 θ：$\tan\theta$ 中的水平距離是 $X - x$，而不是 x。
- 只證明了正確的 v 會給出恆定的變化率，卻沒有證明恆定的變化率必然導致正確的 v；正是這個逆命題（converse）才令這條法則真正可用。

STEP 之外

這就是接球心理學中的「光學加速度抵消」（optical acceleration cancellation）概念：外野手似乎是這樣跑的——讓球的影像以穩定的速率上升，而從不需要預測球會落在哪裏。

這是反饋控制律（feedback control law）的一個例子：把一個觀察到的量保持不變，而不是去計算軌跡。關於拋體運動、相對速度（relative velocity）以及這種思考方式的入門，可參閱 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。