詳細解答

STEP II 1998，第 10 題

力學 • 移動楔上的質點

STEP II 1998，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/98-s2-q10

關鍵思路

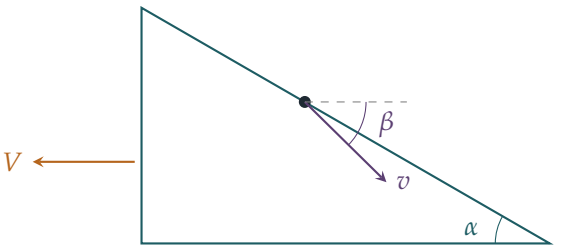
整道題由兩個事實推動。由於質點（particle）一直留在斜面上，它相對於楔塊（*wedge*）的速度必定沿着斜面的方向。另外，由於系統以外沒有任何力在水平方向推動它，而且除重力外沒有其他力做功，所以水平動量（momentum）和能量都守恆。(i)–(iii) 每一部分，都是把其中一個事實寫成方程。之後第 (ii) 部分說明 β 始終不變，於是最後一部分就變成勻加速運動。

解答

模型。質點視為質點；楔塊是只滑動而不轉動的剛體（rigid body）；斜面和地面都是光滑的；質點一直與斜面保持接觸。取斜面向右下方傾斜，於是質點向右下方運動，而楔塊被推向左方，如圖所示。

取水平分量向右為正、垂直分量向上為正，

$$\text{質點的速度} = (v\cos\beta,\ -v\sin\beta), \qquad \text{楔塊的速度} = (-V,\ 0).$$



第 (i) 部分

質點相對於楔塊的速度是

$$(v\cos\beta,\ -v\sin\beta) - (-V,\ 0) = (v\cos\beta + V,\ -v\sin\beta).$$

質點在斜面上時，這個相對速度（relative velocity）沿着斜面，方向在水平線以下 α 角（指向右下方）。所以

$$\frac{v\sin\beta}{v\cos\beta + V} = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

交叉相乘，

$$\begin{aligned} & v\sin\beta\cos\alpha = v\cos\beta\sin\alpha + V\sin\alpha \\ \Longrightarrow\quad & V\sin\alpha = v(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) = v\sin(\beta-\alpha), \end{aligned}$$

這正是所要證明的結果。這純粹是運動學（kinematics）：不需要任何力學原理，只需要「質點不離開斜面」這個事實。

第 (ii) 部分

原理：水平方向的線動量守恆（conservation of linear momentum）。把質點和楔塊視為一個系統。作用在系統上的外力是兩者的重量和地面的法向反作用力（normal reaction），由於地面光滑，這些力全都是垂直的。（質點與斜面之間的反作用力是內力。）所以水平總動量是常數，而由於一切都從靜止開始，它起初是零：

$$mv\cos\beta - MV = 0, \qquad \text{所以} \qquad V = \frac{m}{M}\,v\cos\beta.$$

代入 (i)，並展開 $\sin(\beta-\alpha)$，

$$\frac{m}{M}\,v\cos\beta\sin\alpha = v(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha).$$

當 $t > 0$ 時質點正在運動，所以 $v \neq 0$。另外 $\cos\alpha \neq 0$，而且 $\cos\beta \neq 0$：假如 β 是 $90°$，由動量可得 $V = 0$，於是 (i) 給出 $\sin(\beta-\alpha) = 0$，所以 $\beta = \alpha < 90°$，矛盾。兩邊除以 $v\cos\alpha\cos\beta$，

$$\frac{m}{M}\tan\alpha = \tan\beta - \tan\alpha \quad\Longrightarrow\quad \tan\beta = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\tan\alpha.$$

> ? **想一想** 為甚麼 β 不是直接等於 α？

因為斜面本身正在向左退開。相對於楔塊，質點以 α 角沿斜面下滑，但楔塊在後退，所以相對於地面，質點下降得更陡。留意 (ii) 的右邊是一個常數：β 在每一刻都相同，所以質點沿直線運動。如果 $M \to \infty$，楔塊就留在原位，而 $\beta \to \alpha$，正如所料。

第 (iii) 部分

原理：能量守恆（conservation of energy）。所有接觸面都是光滑的，所以對整個系統做功的力就只有重量。（質點與斜面之間的法向反作用力會分別對兩個物體做功，但這兩份功互相抵消，因為相對速度沿着斜面，所以與反作用力垂直。地面的反作用力則與楔塊的運動方向垂直。）楔塊的質心（centre of mass）在垂直方向沒有移動，所以勢能（potential energy）的損失是 mgy。由靜止開始，

$$mgy = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}MV^2.$$

利用 (ii) 中的 $V = \dfrac{m}{M}v\cos\beta$，

$$mgy = \tfrac{1}{2}mv^2 + \frac{m^2v^2\cos^2\beta}{2M}.$$

兩邊乘以 $2/m$，

$$2gy = v^2\left(1 + \frac{m\cos^2\beta}{M}\right) = \frac{v^2\left(M + m\cos^2\beta\right)}{M},$$

這正是所要證明的結果。

關於 y 的微分方程

質點下降的速率就是它速度的向下分量：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\sin\beta.$$

把 $v = \dot{y}/\sin\beta$ 代入 (iii)（注意由於 $\beta > \alpha > 0$，所以 $\sin\beta \neq 0$）。這就得到微分方程（differential equation）

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 = k\,y, \qquad \text{其中} \qquad k = \frac{2gM\sin^2\beta}{M + m\cos^2\beta}.$$

關鍵在於 k 是一個常數，因為由 (ii) 可知 β 是常數。

要解這個方程，先對 t 求導：

$$2\dot{y}\,\ddot{y} = k\,\dot{y}.$$

當 $t > 0$ 時質點正在下降，所以 $\dot{y} > 0$，我們可以除以它：$\ddot{y} = \tfrac{1}{2}k$。質點的垂直運動有恆定的加速度

$$\ddot{y} = \frac{gM\sin^2\beta}{M + m\cos^2\beta}.$$

積分兩次，並利用 $t = 0$ 時 $y = 0$ 及 $\dot{y} = 0$（它由靜止開始），

$$y = \frac{gMt^2\sin^2\beta}{2\left(M + m\cos^2\beta\right)},$$

這就是所求的結果。

（另一個做法是取正平方根 $\dot{y} = \sqrt{ky}$，然後分離變數（separation of variables）：$\int y^{-1/2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{k}\,t$ 給出 $2\sqrt{y} = \sqrt{k}\,t$，得到相同的答案。先求導的好處，是不必顧慮 $y \equiv 0$ 這個解；它同樣滿足 $\dot{y}^2 = ky$ 和 $y(0) = 0$，卻不是這裏的運動。）

驗算

- 固定的楔塊。令 $M \to \infty$。這時 $\beta \to \alpha$，而 $y \to \frac{1}{2}gt^2\sin^2\alpha$，這是正確的：在固定的光滑斜面上，沿斜面的加速度是 $g\sin\alpha$，而它的垂直分量是 $g\sin^2\alpha$。
- 一個數值例子。取 $M = 2$、$m = 1$、$\alpha = 30°$，由 (ii) 得 $\tan\beta = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\sin^2\beta = \frac{3}{7}$、$\cos^2\beta = \frac{4}{7}$，而公式給出 $y = \frac{1}{6}gt^2$。取 $g = 9.8$ 和 $t = 1$，即 $y \approx 1.6333$。直接對楔塊和質點作逐步模擬（用牛頓定律（Newton's laws），並由接觸條件求出法向反作用力），得到相同的數值；而且在 2000 個隨機例子中，(i)–(iii) 都在捨入誤差範圍內成立。

常見錯誤

- 說質點的運動方向與水平線成 α 角。這只是相對於楔塊而言才成立。
- 沿斜面方向或垂直方向使用動量守恆。地面的反作用力是垂直方向的外力，所以只有水平分量守恆。
- 在能量方程中漏掉楔塊的動能（kinetic energy）$\frac{1}{2}MV^2$。

STEP 之外

被約束在運動曲面上的質點，是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）的經典試金石，你會在大學一年級或二年級學到這門學問。在那裏，你選取兩個坐標（例如楔塊的位置和質點沿斜面下滑的距離），約束力（constraint forces）就會從方程中完全消失，所以只需幾行就能得出那些恆定的加速度。關於帶約束的牛頓力學，以及許多正是這一類的題目，可參閱 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（一本力學入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。