詳細解答

# STEP II 1998，第 1 題

純數學 • 丟番圖方程與奇偶性

> **STEP II 1998，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q1

## 關鍵思路

把立方展開後，大部分的項會互相抵消，剩下一個關於 $n$ 的三次式，其常數項很小。比較等式兩邊的奇偶性（parity），可知 $n$ 必為偶數。再把這個三次方程寫成 $n^2$(某個式子) $=54$ 的形式，問題便化為一個關於因數（divisor）的問題。至於 $(**)$，利用偶數代換 $n=2m$，便直接回到 $(*)$。

## 解答

**方程** $(*)$

利用 $(a+b)^3-(a-b)^3=6a^2b+2b^3$，並取 $a=n$，$b=3$，可得

$$(n+3)^3-(n-3)^3=18n^2+54,$$

所以 $(*)$ 等價於

$$n^3=18n^2+54, \qquad \text{即} \qquad n^2(n-18)=54. \tag{1}$$

$n$ 是偶數。對於任何整數 $n$，右邊 $18n^2+54=2(9n^2+27)$ 都是偶數。假如 $n$ 是奇數，則 $n^3$ 也是奇數，與 $n^3=18n^2+54$ 矛盾。因此 $n$ 是偶數。

$n^2$ 整除 54。在 (1) 的第二種寫法中，$n-18$ 是整數，所以 54 等於 $n^2$ 乘以一個整數。因此 $n^2$ 是 54 的因數。

> ? **想一想** 這兩項事實合起來，怎樣把所有整數都排除掉？

由於 $n$ 是偶數，可設 $n=2k$。於是 $n^2=4k^2$，它是 4 的倍數（而且 $n\neq 0$，因為把 $n=0$ 代入 (1) 會得出 $0=54$）。但 $54=2\times 27$ 不能被 4 整除，所以除了 0 之外，沒有任何 4

的倍數能整除它。這個矛盾說明沒有整數 $n$ 滿足 $(*)$。

（另一個看法：能整除 $54 = 2 \cdot 3^3$ 的平方數只有 1 和 9，所以 $n \in \{\pm 1, \pm 3\}$，而這些全是奇數。）

### 方程 $(**)$

現在取 $b = 6$：

$$(n+6)^3 - (n-6)^3 = 36n^2 + 432,$$

所以 $(**)$ 等價於

$$n^3 = 36n^2 + 432.$$

對於任何整數 $n$，右邊都是偶數，所以與之前完全一樣，$n^3$ 是偶數。由於奇數的立方是奇數，$n$ 必為偶數。

> **想一想** 為甚麼不能直接照搬第一部分的因數論證？

我們固然可以寫成 $n^2(n-36) = 432$，但 $432 = 2^4 \cdot 3^3$ 有不少偶數的平方因數（4、16、36、144），所以單靠整除性的論證並不能完成證明。我們改為利用偶數這個性質。設 $n = 2m$，其中 $m$ 為整數。於是

$$8m^3 = 36 \cdot 4m^2 + 432 \quad \Longleftrightarrow \quad m^3 = 18m^2 + 54,$$

這正正是整數 $m$ 所滿足的方程 (1)。換句話說，$m$ 滿足 $(*)$。事實上，把 $n = 2m$ 代入 $(**)$，所得的不過是把 $n = m$ 代入 $(*)$ 後再全式乘以 8：

$$(2m-6)^3 + (2m)^3 - (2m+6)^3 = 8[(m-3)^3 + m^3 - (m+3)^3].$$

我們已證明沒有整數滿足 $(*)$，所以這樣的 $m$ 並不存在。因此沒有整數 $n$ 滿足 $(**)$。

## 驗算

- 把 $n = 1$ 代入展開式試試：$(4)^3 - (-2)^3 = 64 + 8 = 72 = 18 + 54$。✓
- 三次式 $n^3 - 18n^2 - 54$ 恰好有一個實根，約為 $n \approx 18.164$，並不是整數。（用電腦直接搜尋 $|n| < 10^5$ 的範圍，兩個方程都找不到解。）
- 對於 $(**)$，實數解為 $n \approx 2 \times 18.164 = 36.33$，與 $n = 2m$ 這個縮放關係吻合。

## 常見錯誤

- 忘記 $n = 0$ 需要另外交代一句：0 是偶數，但 0 不是 54 的因數。在這裏，(1) 已即時把它排除。

- 把立方完全展開，結果在運算中出錯。恆等式 $(a+b)^3-(a-b)^3=6a^2b+2b^3$ 可以省掉一半工夫。
- 在 $(**)$ 中，嘗試證明 $n^2 \mid 432$ 是行不通的。「$n$ 是偶數」的真正用處在於代換 $n=2m$。

## STEP 之外

最後一步由 $(**)$ 的一個解，得出一條形式相同但數字較小的方程的解，這是費馬（Fermat）遞降法（method of descent）的一個簡單形式。反覆運用這個方法，可以證明 $x^3+y^3=z^3$ 沒有正整數解，這就是費馬最後定理（Fermat's Last Theorem）的三次情形，最先由歐拉（Euler）證明。本題的三項構成等差數列（arithmetic progression），令問題容易得多。事實上，$(n-3k)^3+n^3=(n+3k)^3$ 表示 $t=n/k$ 是 $t^3-18t^2-54$ 的根，而根據有理根定理（rational root theorem），這個三次式沒有有理根，所以對任何 $k\neq 0$ 都沒有整數解。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 是一本介紹整除性、奇偶性論證和丟番圖方程（Diophantine equations）的出色入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。