詳細解答

# STEP I 1998，第 9 題

力學 • 擺的碰撞

> **STEP I 1998，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q9

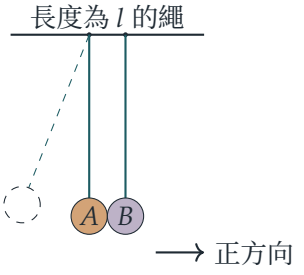
## 關鍵思路

由於位移非常小，每個球都像單擺（simple pendulum）一樣作簡諧運動（simple harmonic motion），而周期 $2\pi\sqrt{l/g}$ 與振幅和速率都無關。兩個單擺長度相同，所以在最低點發生任何一次碰撞之後，兩個球都會在同一時刻（即半個周期之後）回到最低點，而且速度方向相反。只要知道第二次碰撞在何處、何時發生，每次碰撞都只需寫兩行：動量守恆和牛頓實驗定律（Newton's experimental law）。

## 解答

### 模型

我們把 $A$ 和 $B$ 視為質量為 $m$ 的質點，各自繫於長度同為 $l$ 的不可伸長輕繩上，忽略空氣阻力，並假設碰撞在瞬間完成，衝量（impulse）沿水平的連心線方向。取第一次碰撞時 $A$ 的運動方向（由 $A$ 指向 $B$）為正方向，並設 $\omega = \sqrt{g/l}$。



### 為何每次碰撞都在最低點發生

在小幅振動下，不論振幅多大，每個球都作角頻率（angular frequency）為 $\omega$ 的簡諧運動。因此，一個以速率 $v$ 離開最低點的球，其水平位移為 $\frac{v}{\omega}\sin\omega t$，並且在時間 $\pi/\omega$（半個周期）之後回到最低點，此時速度為 $-v$——對任何 $v$ 都是如此。

第一次碰撞在最低點發生：$B$ 靜止地懸在該處，而 $A$ 以速率 $u$ 到達。假設某次碰撞在最低點發生，碰撞後 $A$ 和 $B$ 的速度分別為 $p \le q$（剛碰撞完，兩球不可能互相靠近）。從最低點量起，在其後時間 $t$，兩球之間的距離為

$$\frac{q}{\omega}\sin\omega t - \frac{p}{\omega}\sin\omega t = \frac{q-p}{\omega}\sin\omega t,$$

當 $0 < t < \pi/\omega$ 時此值為正，而在 $t = \pi/\omega$ 時為零。所以兩球不可能更早相遇，而且恰好在兩者都回到最低點時再次相遇。這正是題目的提示：兩個單擺周期相同，所以它們總是一同回到最低點。由歸納法（induction）可知，每次碰撞都在最低點發生，而且相鄰兩次碰撞相隔半個周期。

### 第一次碰撞

設第一次碰撞剛結束時 $A$ 和 $B$ 的速度分別為 $v_A$ 和 $v_B$。由動量守恆（conservation of momentum）（在最低點時繩的張力沿鉛垂方向，所以不產生水平衝量）和牛頓實驗定律，得

$$mv_A + mv_B = mu,$$
$$v_B - v_A = eu.$$

兩式相加和相減，得

$$v_A = \tfrac{1}{2}u(1-e), \qquad v_B = \tfrac{1}{2}u(1+e).$$

兩者都 $\ge 0$，所以兩個球都擺向 $B$ 的一方（若 $e = 1$，$A$ 會完全停下，一直懸在最低點）。

**想一想** 第二次碰撞前一刻的速度是多少？

半個周期之後，每個球都回到最低點，速度方向相反：$A$ 的速度為 $-\frac{1}{2}u(1-e)$，$B$ 的速度為 $-\frac{1}{2}u(1+e)$。$B$ 較快，所以從後面追上 $A$。它相對於 $A$ 的接近速率為 $\frac{1}{2}u(1+e) - \frac{1}{2}u(1-e) = eu$。

### 第二次碰撞

設第二次碰撞剛結束時 $A$ 和 $B$ 的速度分別為 $w_A$ 和 $w_B$。由動量守恆，得

$$mw_A + mw_B = -\tfrac{1}{2}mu(1-e) - \tfrac{1}{2}mu(1+e) = -mu,$$

而由牛頓實驗定律（分離速率等於接近速率 $eu$ 的 $e$ 倍），得

$$w_B - w_A = e \cdot eu = e^2 u.$$

兩式相減和相加，得

$$w_A = -\tfrac{1}{2}u(1+e^2), \qquad w_B = -\tfrac{1}{2}u(1-e^2).$$

所以緊接第二次碰撞之後，$A$ 的速率為 $\frac{1}{2}u(1+e^2)$，正如題目所求，而 $B$ 的速率為 $\frac{1}{2}u(1-e^2)$，兩者都朝着 $A$ 最初被釋放的那一方運動。

## 驗算

- 完全彈性，$e = 1$：最後 $A$ 的速率為 $u$，而 $B$ 靜止。這是對的：第一次碰撞後 $A$ 停下，$B$ 取得速率 $u$；其後 $B$ 以速率 $u$ 返回，並把它全數交還給 $A$。
- $e = 0$：兩個速率都是 $\frac{1}{2}u$。兩球實際上合為一體，第一次碰撞後以速率 $\frac{1}{2}u$ 一起運動，所以這也是對的。
- 第二次碰撞後的動量為 $-\frac{1}{2}mu(1+e^2) - \frac{1}{2}mu(1-e^2) = -mu$，與原來的 $mu$ 方向相反。
- 我們模擬了兩個真實（非線性）的單擺，取 $l = 1\,\text{m}$，初始角度為 0.01 rad。第二次碰撞在第一次碰撞之後 1.0001 個半周期發生，位置與最低點相差不到 $3 \times 10^{-6}$ rad；取 $e = 0.7$ 時，碰撞後的速率為 $0.745u$ 和 $0.255u$，與 $\frac{1}{2}(1+e^2)$ 和 $\frac{1}{2}(1-e^2)$ 吻合。

## 常見錯誤

- 忘記在第二次碰撞之前兩個速度都已反向，把情況當作 $B$ 撞向靜止的 $A$。
- 在第二次碰撞時以 $eu$ 代替 $e \cdot$(接近速率)。這裏接近速率剛好是 $eu$，所以分離速率是 $e^2u$。
- 說碰撞在最低點發生，是「因為球本來就懸在那裏」。真正的原因是周期與振幅無關，這也是為何球只可拉開很小的距離。

## STEP 之外

等時性（isochronism，即周期與振幅無關）對單擺而言只是近似成立：擺幅較大時周期會增長，其準確值由橢圓積分（elliptic integral）給出，而碰撞位置亦會逐漸偏離最低點。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對單擺和碰撞都有嚴謹細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。