詳細解答

STEP I 1998，第 8 題

純數學 • 二階微分方程

STEP I 1998，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/98-s1-q8

關鍵思路

這條題目雖然披着流體力學的外衣，骨子裏卻是一道純粹的微分方程（differential equation）題。左邊是「導數的導數」，所以只需積分兩次，並記住兩次積分之間除以 r 會令常數變成對數。接着，物理上的合理性（軸上的速度必須有限）確定其中一個常數，而管壁上的無滑移條件（no-slip condition）則確定另一個。

解答

通解

將方程乘以 r，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = -kr.$$

對 r 積分一次，

$$r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\tfrac{1}{2}kr^2 + A,$$

其中 A 為常數。兩邊除以 r（這樣做沒有問題，因為在管內軸線以外的地方 $r > 0$）：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\tfrac{1}{2}kr + \frac{A}{r}.$$

再積分一次，由於 $r > 0$，可寫 $\ln r$ 而不必寫 $\ln|r|$，

$$\boxed{v = -\tfrac{1}{4}kr^2 + A\ln r + B}$$

其中 A 和 B 為任意常數。二階方程的通解（general solution）含有兩個常數，正如所料。

軸線附近的情況

當 $r \to 0^+$ 時，$-\frac{1}{4}kr^2$ 和 B 兩項保持有界（分別趨向 0 和 B），而 $\ln r \to -\infty$。因此若 $A \neq 0$，則 $A \ln r$ 趨向 $-\infty$ 或 $+\infty$（視乎 A 的正負），於是 $|v| \to \infty$。要避免這種情況，唯一的方法是取 $A = 0$，此時 $v \to B$，是有限值。

想一想 為甚麼我們要堅持 $A = 0$？

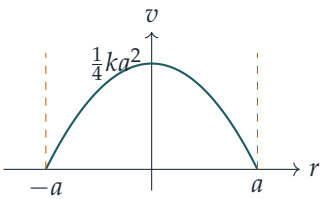
軸線 $r = 0$ 位於流體之內，所以該處的速率必須有限：現實中的流體不會沿着管道中心以無限大的速度流動。$\ln r$ 這個解在 $r > 0$ 時完全滿足方程，但在這裏從物理角度看卻不可接受。（若是兩個同軸圓柱之間的流動，軸線並不屬於流體的一部分，這個解便可以保留。）

速度分佈

取 $A = 0$，便有 $v = B - \frac{1}{4}kr^2$。由條件「在 $r = a$ 處 $v = 0$」得 $B = \frac{1}{4}ka^2$，所以

$$\boxed{v = \tfrac{1}{4}k\left(a^2 - r^2\right).}$$

速度分佈（velocity profile）是一條拋物線：速率在軸上最大，為 $\frac{1}{4}ka^2$，到管壁處則降至零。



（圖中所示為沿直徑切開的截面，虛線代表管壁。）

流量

代入題目給出的公式，

$$F = 2\pi \int_0^a r \cdot \tfrac{1}{4}k\left(a^2 - r^2\right) \mathrm{d}r = \frac{\pi k}{2} \int_0^a \left(a^2 r - r^3\right) \mathrm{d}r$$
$$= \frac{\pi k}{2}\left[\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{\pi k}{2} \cdot \frac{a^4}{4},$$

所以

$$\boxed{F = \frac{\pi k a^4}{8}.}$$

驗算

- 將 $v = \frac{1}{4}k(a^2 - r^2)$ 代回原方程：$r\,v' = -\frac{1}{2}kr^2$，其導數為 $-kr$，再除以 r 得 $-k$，符合要求。
- 平均速率為 $F/(\pi a^2) = \frac{1}{8}ka^2$，恰好是最大速率 $\frac{1}{4}ka^2$ 的一半，這正是拋物線形速度分佈廣為人知的性質。
- 數值上，取 $k = 2$ 和 $a = 1$，用辛普森法則（Simpson's rule）得 $F \approx 0.785398$，與 $\pi/4$ 吻合。

常見錯誤

- 第一次積分時漏掉常數，於是失去 $A \ln r$ 一項，令題目中「除非」（unless）的那一部分變得毫無意義。
- 將 $-kr$ 積分得 $-\frac{1}{2}kr^2$ 之後，忘記先除以 r 便再積分。
- 在 F 的積分中漏掉因子 r：通過半徑為 r 的薄圓環的流量與其圓周 $2\pi r$ 成正比，而不是與某個常數成正比。

STEP 之外

算子 $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)$ 正是拉普拉斯算子（Laplacian）∇^2 在柱坐標（cylindrical coordinates）下作用於只依賴 r 的函數時的形式，所以這條題目其實就是泊松方程（Poisson's equation）$\nabla^2 v = -k$；而 $\ln r$ 這個解，則是點電荷的 $1/r$ 勢在二維的對應。$F \propto a^4$ 這個結果稱為泊肅葉定律（Poiseuille's law）：管道半徑減半，流量便減至原來的十六分之一，這正是動脈收窄影響如此嚴重的原因。微分方程方面，可參閱 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（一本微分方程入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。