詳細解答

STEP I 1998，第 7 題

純數學 • 等比級數

> **STEP I 1998，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q7

關鍵思路

不要逐年追蹤結餘，而應分開追蹤每一筆存款：一筆 £a 的存款在銀行裏賺取了 k 年利息後，會增長至 £ar^k，而總額就是一個等比級數（geometric series）。至於提款，把同一想法反過來用即可。每一筆提款都是由起始結餘中的某一部分支付的，而這部分在提取之前一直在賺取利息，所以我們比較的是同一時刻的價值。

解答

靜止期結束時的金額

利率為 $\rho\%$，即每年年終結餘乘以 $r = 1 + \frac{\rho}{100}$。

把存款的年份編號為 $1, 2, \ldots, m$。在第 k 年年初存入的款項，會在第 $k, k+1, \ldots, m$ 年的年終賺取利息，共 $m - k + 1$ 次。因此在第 m 年年終，它的價值為 ar^{m-k+1}。對 k 求和，第 m 年年終的結餘為

$$\begin{aligned} a\left(r^m + r^{m-1} + \cdots + r\right) &= ar\left(1 + r + \cdots + r^{m-1}\right) \\ &= ar\,\frac{r^m - 1}{r - 1}, \end{aligned}$$

這裏用了等比級數的求和公式（由於 $\rho > 0$，故有 $r \neq 1$）。

在其後的 l 年裏，既無存款亦無提款，所以這個金額再乘以 r 共 l 次。因此這段時期結束時的總額為

$$£a\,\frac{r^{l+1}(r^m - 1)}{r - 1},$$

正如題目所求。把這個金額記作 P。

提款

第一次提款在緊接靜止期之後那一年的年初進行，這正是結餘為 P 的時刻。設 B_k 為剛完成第 k 次提款後的結餘，則

$$B_1 = P - b, \qquad B_k = rB_{k-1} - b \quad (k = 2, \ldots, n),$$

因為在兩次提款之間，這筆錢會賺取一年的利息。把這個遞歸關係（recurrence）逐層展開，得

$$\begin{aligned} B_n &= r^{n-1}P - b\left(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + r + 1\right) \\ &= r^{n-1}P - b\,\frac{r^n - 1}{r - 1}. \end{aligned}$$

> **想一想** 為甚麼 P 所乘的因子是 r^{n-1}，而不是 r^n？

由第一次提款到第 n 次提款之間，只有 $n-1$ 個年終，所以這筆錢只賺取了 $n-1$ 次利息。最後一次提款之後所派的利息無關重要，因為那時戶口已經清空。同樣道理，第 j 次提款（由最後一次倒數，最後一次為 $j = 0$）在第 n 次提款之前會乘以 r^j。

第 n 次提款之後戶口清空，所以 $B_n = 0$。由此得

$$r^{n-1}P = b\,\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

代入 P：

$$a\,\frac{r^{l+n}(r^m - 1)}{r - 1} = b\,\frac{r^n - 1}{r - 1},$$

於是

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{r^n - 1}{r^{l+n}\,(r^m - 1)}}$$

要理解這條等式，另一個等價的方法是計算「現值」（present value）。以第一次提款的時刻為準，第 k 次提款的價值為 b/r^{k-1}，而這些價值的總和必須等於 P：

$$P = b\left(1 + r^{-1} + \cdots + r^{-(n-1)}\right).$$

驗算

- 若 $m = n$，答案簡化為 $a/b = r^{-(l+n)}$，即 $b = ar^{l+n}$。這是合理的：把第 k 筆存款與第 k 次提款配對，兩者剛好相隔 $m + l = l + n$ 年，所以每筆存款恰好支付一次提款。
- 當 $r \to 1$（沒有利息）時，$\dfrac{r^n - 1}{r^m - 1} \to \dfrac{n}{m}$，所以 $a/b \to n/m$，即 $ma = nb$。存入的錢等於提出的錢。

- 取 $\rho = 5$、$m = n = 10$、$l = 5$ 及 $a = 1000$，逐年模擬得出 $P \approx 16855.58$。公式給出 $a/b = 1.05^{-15} \approx 0.48102$，所以 $b \approx 2078.93$；用這個 b 值，模擬的戶口最後剛好歸零。此外，用電腦以分數作精確運算，隨機選取 500 組 r、l、m 和 n 的值，兩條公式亦全部得到確認。

常見錯誤

- 在第一個和式中把 r^{m+1} 寫成 r^m。由於存款是在每年年初存入的，即使是最後一筆存款，也會賺取一年的利息。
- 把 $r^{n-1}P$ 寫成 r^nP。第 n 年年終的利息，是在戶口清空之後才派發的。

STEP 之外

這就是年金（annuity）的數學。把各筆款項折現（discounting）至同一日期（即現值）再作比較，是精算數學和金融數學的基本原則。遞歸關係 $B_k = rB_{k-1} - b$ 是一條一階線性差分方程（first-order linear difference equation）。它的解是一個特定的常數加上 r^k 的倍數，與我們求解一階線性微分方程（differential equation）的方法如出一轍；大學一年級有關差分方程和微分方程的課程會探討這種對應關係。想做更多這類題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。