詳細解答

STEP I 1998，第 6 題

純數學 • 三角函數遞推關係

> **STEP I 1998，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q6

關鍵思路

遞推關係（recurrence）的每一步都是把某個量與一個餘弦取平均，而半角恆等式（half-angle identity）$\frac{1}{2}(1+\cos\theta) = \cos^2\frac{\theta}{2}$ 會把這個平均變成一個完全平方。b_{n+1} 的公式中的平方根隨即又把這個平方消去。一旦留意到每一項都以前一項為因子，一般規律就不難猜出，而驗證它只需一步歸納法（induction）。

解答

全題中 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，所以每個角 $x/2^k$（$k \geq 1$）都位於 $(0, \frac{\pi}{4})$ 內，其餘弦為正。在 b_{n+1} 的定義中，我們取正的平方根。

求 a_2 和 b_2

利用 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$，

$$a_2 = \tfrac{1}{2}(\cos x + 1) = \cos^2\frac{x}{2}, \qquad b_2 = (a_2 b_1)^{1/2} = \left(\cos^2\frac{x}{2}\right)^{1/2} = \cos\frac{x}{2},$$

其中最後一步用到 $\cos\frac{x}{2} > 0$。

求 a_3 和 b_3

抽出公因子 $\cos\frac{x}{2}$，然後再用一次半角恆等式，這次取 $\theta = \frac{x}{2}$：

$$a_3 = \tfrac{1}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{4}.$$

於是

$$b_3 = (a_3 b_2)^{1/2} = \left(\cos^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{4}\right)^{1/2} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4},$$

因為兩個餘弦都是正數。這就是題目要求的兩個表達式。

一般規律

比較目前得到的各項，

$$b_2 = \cos\frac{x}{2},\quad b_3 = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4},\qquad a_2 = b_2\cos\frac{x}{2},\quad a_3 = b_3\cos\frac{x}{4}.$$

每個 b 都比前一個多乘一個餘弦，角度減半；而每個 a 則是對應的 b 再乘一次它最後的那個餘弦。因此我們猜想，對 $n \geq 2$，

$$b_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}} = \prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{x}{2^k},$$
$$a_n = b_n\cos\frac{x}{2^{n-1}} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\,\cos^2\frac{x}{2^{n-1}}.$$

想一想 要驗證一個猜想滿足遞推關係，究竟需要檢查甚麼？

我們要檢查兩件事：猜想與初始值吻合；以及若公式對 a_n 和 b_n 成立，則遞推關係會給出 a_{n+1} 和 b_{n+1} 的公式。兩者合起來，便由歸納法證明公式對所有 $n \geq 2$ 成立。

*初始值。*當 $n = 2$ 時，猜想給出 $b_2 = \cos\frac{x}{2}$ 和 $a_2 = \cos^2\frac{x}{2}$，與上面求得的結果吻合。

*歸納步驟。*假設公式對某個 $n \geq 2$ 成立。設 $\theta = x/2^{n-1}$，則 $x/2^n = \theta/2$。於是

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n) = b_n\cdot\tfrac{1}{2}(1+\cos\theta) = b_n\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

對 b_{n+1} 的猜想是 $b_n\cos\frac{\theta}{2}$（多乘一個餘弦，角度為 $x/2^n$），所以上式即 $a_{n+1} = b_{n+1}\cos\frac{x}{2^n}$，正是所猜想的 a_{n+1} 的形式。接著，

$$b_{n+1} = (a_{n+1}b_n)^{1/2} = \left(b_n^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{1/2} = b_n\cos\frac{x}{2^n} = \prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k},$$

這裏取正根，而這樣做是合理的，因為 b_n 和 $\cos\frac{x}{2^n}$ 都是正數。這正是所猜想的 b_{n+1} 的形式，所以遞推關係的兩條等式都得到滿足，公式對所有 $n \geq 2$ 成立。

事實上，若約定空積（empty product）等於 1，公式亦給出 $b_1 = 1$ 和 $a_1 = \cos x$，所以公式由 $n = 1$ 起已經成立。

驗算

- 取 $x = \frac{\pi}{3}$。直接按遞推關係計算，得 $a_3 \approx 0.808013$ 和 $b_3 \approx 0.836516$，而 $\cos\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{12}$ 和 $\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}$ 給出相同的數值。

- 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 內隨機抽取 2000 個 x，我們把遞推關係與乘積公式逐一比較，直至 $n = 24$：兩者相差不超過 10^{-15}。
- 當 $x \to 0$ 時，每個餘弦都趨向 1，a_1 和 b_1 亦然。所有項都趨向 1，與預期相符。

常見錯誤

- 寫下 $\sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$ 而沒有說明為何 $\cos\theta > 0$。這裏等式之所以成立，是因為每個角都位於 $(0, \frac{\pi}{4})$ 內。
- 由 $n = 2$ 和 3 猜出規律後便停筆。題目要求我們驗證遞推關係，所以歸納步驟必不可少。

STEP 之外

把 b_n 乘以 $\sin\frac{x}{2^{n-1}}$，並反覆運用 $2\sin\phi\cos\phi = \sin 2\phi$，可得 $b_n = \dfrac{\sin x}{2^{n-1}\sin(x/2^{n-1})}$。當 $n \to \infty$ 時，它趨向 $\dfrac{\sin x}{x}$（取 $x = 1$，遞推關係在數十步之後給出 0.841471）。取 $x = \frac{\pi}{2}$，便得到關於 $2/\pi$ 的韋達（Viète）無窮乘積（infinite product）。這種「先取平均、再取幾何平均」的做法，與高斯（Gauss）的算術幾何平均（arithmetic–geometric mean）一脈相承，也是學習證明數列（sequence）收斂（converge）並求其極限（limit）的一個很好的入門例子。關於數列極限的嚴謹論述，可參閱 Abbott, *Understanding Analysis*（一本實分析入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。