詳細解答

STEP I 1998，第 5 題

純數學 • 複數與旋轉

> **STEP I 1998，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q5

關鍵思路

兩部分都是讓複數（complex number）的代數運算替我們完成工作。在第 (i) 部分，由正六邊形（regular hexagon）的一個頂點走到下一個頂點，就是繞中心旋轉（rotation）60°，而繞原點的旋轉不過是乘以一個模（modulus）為 1 的複數，所以我們相對於 Q 來計算。在第 (ii) 部分，一個數是實數，當且僅當它的虛部（imaginary part）為零，所以我們把每個分母實數化（realise），再令虛部等於零。

解答

第 (i) 部分

相對於中心來計算。由 Q 到 A 的向量為

$$A - Q = (10 + 2i) - (4 + 6i) = 6 - 4i.$$

正六邊形的六個頂點均勻地分佈在以 Q 為圓心的圓上，所以角 AQB 是 $360°/6 = 60°$，而 QB 與 QA 等長。順時針移動即是轉過 $-60°$，也就是乘以

$$\mathrm{e}^{-i\pi/3} = \cos\tfrac{\pi}{3} - i\sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i.$$

> ? **想一想** 為甚麼要乘 $A - Q$，而不是 A 本身？

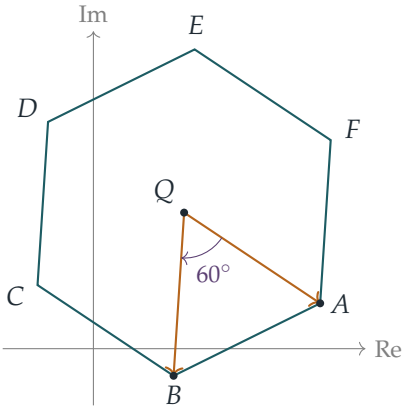
乘以 $\mathrm{e}^{-i\pi/3}$ 是繞原點旋轉。要繞 Q 旋轉，我們先把 Q 移到原點（減去 Q），旋轉，然後

移回去（加上 Q）。所以

$$\begin{aligned} B - Q &= (6-4i)\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) \\ &= 3 - 3\sqrt{3}\,i - 2i + 2\sqrt{3}\,i^2 \\ &= (3-2\sqrt{3}) - (2+3\sqrt{3})\,i, \end{aligned}$$

再加上 $Q = 4+6i$，得

$$\boxed{B = (7-2\sqrt{3}) + (4-3\sqrt{3})\,i} \approx 3.536 - 1.196\,i.$$



圖形印證了方向：A 位於 Q 的右下方，由它出發順時針走，下一個頂點幾乎在 Q 的正下方，正如我們求得的 B 那樣。

第 (ii) 部分

把分子和分母同乘以共軛複數（conjugate），將每個分母實數化，當中用到 $(1+ki)(1-ki) = 1+k^2$：

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}, \qquad \frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{5}, \qquad \frac{1}{1+3i} = \frac{1-3i}{10}.$$

由於 a、b、c 都是實數，整個算式的虛部為

$$-\frac{a}{2} - \frac{2b}{5} - \frac{3c}{10} = -\frac{5a+4b+3c}{10}.$$

這個算式是實數，當且僅當這個虛部為零，所以所求的條件是

$$\boxed{5a+4b+3c=0}.$$

（任何非零整數倍，例如 $-5a-4b-3c=0$，都是同一個條件。）事實上，由於我們求出的是虛部的準確值，這個條件既是充分條件（sufficient），也是必要條件（necessary）。

驗算

- 在第 (i) 部分，$|A-Q| = |6-4i| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$。我們求得的 B 給出 $|B-Q|^2 = (3-2\sqrt{3})^2 + (2+3\sqrt{3})^2 = 21 - 12\sqrt{3} + 31 + 12\sqrt{3} = 52$，所以 B 確實在正確的圓上；而數值上亦有 $|B-A| \approx 7.211 = |A-Q|$，這正是等邊三角形 QAB 所必須滿足的。
- 在第 (ii) 部分，試取 $a=3$、$b=0$、$c=-5$（它們滿足 $5a+4b+3c=0$）：$\frac{3(1-i)}{2} - \frac{5(1-3i)}{10} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)i = 1$，這是實數。
- 以 10 000 組滿足 $c = -(5a+4b)/3$ 的隨機三元組作數值檢驗，每一次虛部都是零。

常見錯誤

- 逆時針旋轉（乘以 $e^{i\pi/3}$）會得到 $(7+2\sqrt{3}) + (4+3\sqrt{3})i$，那是頂點 F，而不是 B。
- 把 A 繞原點旋轉，而不是繞 Q 旋轉。
- 在第 (ii) 部分，令實部等於零；或者忘記了 a、b、c 必須是實數，才可以這樣直接讀出虛部。

STEP 之外

乘以 $e^{i\theta}$ 是一個旋轉，而映射 $z \mapsto \alpha z + \beta$ 則是先旋轉和放大（enlargement），再作平移（translation）；這些都是莫比烏斯變換（Möbius transformations）最簡單的例子，而莫比烏斯變換是複分析（complex analysis）入門課程的研習內容。以原點為中心的正多邊形，其頂點就是 z_0 乘以各個單位根（roots of unity），這個事實是大量代數和幾何的起點。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）把這種從幾何角度看複數乘法的觀點發揮得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。