詳細解答

STEP I 1998，第 4 題

純數學 • 約束最優化

> **STEP I 1998，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q4

關鍵思路

內接（inscribed）於圓的長方形，其對角線就是直徑（diameter），所以它的邊長 a 和 b 由畢氏定理（Pythagoras' theorem）連繫起來：a^2+b^2 是固定的。於是整個問題就變成：當 a^2+b^2 保持不變時，$a+b$、a^2+b^2 和 a^3+b^3 會怎樣變化。$n=2$ 這個情況是轉捩點：低於此值時正方形勝出，恰在此值時全部打成平手，高於此值時正方形反而敬陪末座。

解答

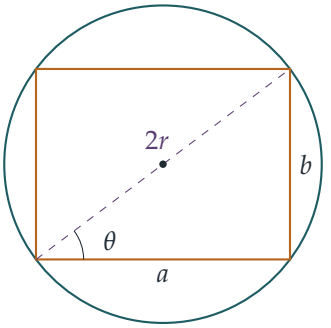
設圓的半徑為 r，長方形的邊長為 $a, b > 0$。長方形的每個角都是直角，所以它所對的弦是直徑（半圓上的圓周角）；因此每條對角線都是直徑，並且

$$a^2 + b^2 = (2r)^2 = 4r^2.$$

反過來，任何滿足 $a^2+b^2=4r^2$ 的 $a, b > 0$ 都給出一個可放進圓內、且頂點都在圓上的長方形。所以不妨寫成

$$a = 2r\cos\theta, \qquad b = 2r\sin\theta, \qquad 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2},$$

其中 θ 是對角線與長度為 a 的邊之間的夾角。



周界

周界（perimeter）為 $P = 2(a+b)$。由於 $(a-b)^2 \geq 0$，我們有 $2ab \leq a^2 + b^2$，所以

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2+b^2) = 8r^2,$$

等號成立當且僅當 $a = b$。因為 $a + b > 0$，由此得 $a + b \leq 2\sqrt{2}\,r$，即

$$P \leq 4\sqrt{2}\,r,$$

而 $4\sqrt{2}\,r$ 這個值恰好在 $a = b = \sqrt{2}\,r$ 時取得。所以周界最大的長方形就是正方形，正如題目所要求證明的。

$n = 2$ 的情況

四條邊的平方和是

$$2(a^2+b^2) = 8r^2,$$

不論是哪一個長方形都一樣。所以每個內接長方形都給出相同的值：它們之間無分高下，特別是正方形並不比其他長方形優勝。

$n = 3$ 的情況

現在考慮 $S = 2(a^3+b^3)$。由於每條邊都比直徑短，$0 < a < 2r$ 且 $0 < b < 2r$，所以 $a^3 < 2r\,a^2$ 及 $b^3 < 2r\,b^2$。兩式相加，

$$S = 2(a^3+b^3) < 2 \cdot 2r(a^2+b^2) = 16r^3.$$

另一方面，當 $\theta \to 0$ 時（一個又長又窄的長方形，其中 $a \to 2r$ 而 $b \to 0$），$S \to 2(2r)^3 = 16r^3$。所以 S 可以任意接近 $16r^3$，卻永遠達不到它：*並不存在使 S 最大的長方形*。唯一能達到 $16r^3$ 的「形狀」是退化（degenerate）的情形，即把一條直徑來回描兩次，而那並不是長方形。

想一想 那麼正方形又怎樣了？

它由最好變成了最差。設 $f(\theta) = \cos^3\theta + \sin^3\theta$，則 $S = 16r^3 f(\theta)$，而

$$f'(\theta) = -3\cos^2\theta\sin\theta + 3\sin^2\theta\cos\theta = 3\sin\theta\cos\theta\,(\sin\theta - \cos\theta).$$

在 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 上，因子 $\sin\theta\cos\theta$ 是正的，而 $\sin\theta - \cos\theta$ 在 $\theta < \frac{\pi}{4}$ 時為負，在 $\theta > \frac{\pi}{4}$ 時為正。所以 f 先遞減後遞增，而正方形（$\theta = \frac{\pi}{4}$）給出的是最小值，

$$S_{\min} = 16r^3\left(2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 8\sqrt{2}\,r^3.$$

總括而言，對於 $n = 3$，S 的取值填滿區間 $[8\sqrt{2}\,r^3,\ 16r^3)$：正方形給出最小值，而沒有任何長方形給出最大值。

對每個 $n > 2$ 情況都一樣：在 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 上有 $\cos^n\theta + \sin^n\theta < \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$，因為 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 都嚴格介乎 0 與 1 之間，所以只有把長方形壓扁，才能趨近上確界 $2(2r)^n$。

驗算

- 取 $r = 1.7$，我們以數值方法讓 θ 掃過 $(0, \frac{\pi}{2})$：周界在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 處達到峯值，其值為 $4\sqrt{2}\,r \approx 9.617$；平方和恆等於 $8r^2 = 23.12$；而立方和則由接近 $16r^3 \approx 78.61$ 下降至正方形處的 $8\sqrt{2}\,r^3 \approx 55.58$，然後再度上升，始終達不到 78.61。
- 一個簡單的合理性檢查：單位圓內的 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ 正方形周界為 $4\sqrt{2} \approx 5.66$，而一個 1.9×0.62 的長方形（幾乎就是一條直徑）周界約為 5.04。

常見錯誤

- 說 $n = 3$ 時的最大值是 $16r^3$，「在 $\theta = 0$ 處取得」。那是一條線段，不是長方形，所以最大值並不存在；你必須指出這一點，並說明為何不等式是嚴格的。
- 求出 $n = 3$ 時的駐點（stationary point）$\theta = \frac{\pi}{4}$ 後，沒有檢查其性質就把它當作極大點。

STEP 之外

$n = 3$ 的情況讓我們初次體會*上確界*（supremum）與*最大值*（maximum）的分別：開區間上的連續函數（continuous function）不一定取得它的界，這正是極值定理（extreme value theorem）堅持要求有界閉區間的原因。在 $n = 2$ 處出現的逆轉，是冪平均不等

式（power-mean inequalities）的一個例子，這類不等式比較不同 p 值下的 $\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p}$。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本數學分析入門書）對上確界和極值定理有嚴謹細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。