詳細解答

STEP I 1998，第 3 題

純數學 • 真假命題的證明

> **STEP I 1998，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q3

關鍵思路

每一部分所需的工具都不同，而首要工作是判斷該命題是真是假。答「真」需要一個涵蓋所有情況的證明；答「假」則只需一個反例（counterexample），或者一個說明符合要求的對象根本不可能存在的論證。取對數（logarithm）可解決 (i)，選一個合適的 θ 值可解決 (ii)，多項式（polynomial）在 θ 很大時的表現可解決 (iii)，而一個完全平方（perfect square）可解決 (iv)。

解答

第 (i) 部分：真

由於 $a > 0$，可以寫成 $a = \mathrm{e}^{\ln a}$。於是

$$a^{\ln b} = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^{\ln b} = \mathrm{e}^{\ln a \ln b},$$
$$b^{\ln a} = \left(\mathrm{e}^{\ln b}\right)^{\ln a} = \mathrm{e}^{\ln b \ln a}.$$

因為乘法符合交換律，兩個指數相等，所以對所有 $a, b > 0$ 都有 $a^{\ln b} = b^{\ln a}$。（等價的說法是：兩邊都是正數，而且對數相同，都是 $\ln a \ln b$。）

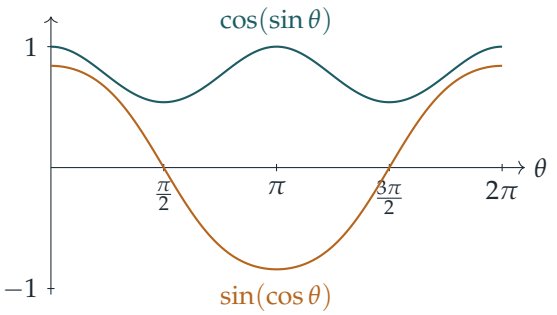
第 (ii) 部分：假

一個反例已經足夠。取 $\theta = 0$：

$$\cos(\sin 0) = \cos 0 = 1, \qquad \sin(\cos 0) = \sin 1.$$

由於 $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$，可知 $0 < \sin 1 < 1$（事實上 $\sin 1 \approx 0.841$），所以兩邊並不相等，命題為假。

事實上兩邊永遠不會相等；從圖像可見，$\cos(\sin\theta)$ 總是在 $\sin(\cos\theta)$ 之上。



要證明這一點（本題並不要求），留意 $\sin(\cos\theta) \le \sin|\cos\theta| = \cos\left(\frac{\pi}{2} - |\cos\theta|\right)$，以及 $\cos(\sin\theta) = \cos|\sin\theta|$。$|\sin\theta|$ 和 $\frac{\pi}{2} - |\cos\theta|$ 都落在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 之內，而餘弦在這個區間上遞減；又因為 $|\sin\theta| + |\cos\theta| \le \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$，所以 $|\sin\theta| < \frac{\pi}{2} - |\cos\theta|$。因此對每一個 θ 都有 $\cos(\sin\theta) > \sin(\cos\theta)$。

第 (iii) 部分：假

設 P 為任意多項式。我們要證明存在某個實數 θ 使得 $|P(\theta) - \cos\theta| > 10^{-6}$，以下分兩種情況討論。

P 爲常數，設 $P(\theta) = c$。取 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$，此時 $\cos\theta$ 分別是 1 和 -1，由三角不等式（triangle inequality）得

$$|c-1| + |c+1| \ge |(c+1) - (c-1)| = 2,$$

所以 $|c-1|$、$|c+1|$ 之中至少有一個不小於 1，遠遠大於 10^{-6}。

P 的次數（*degree*）爲 $n \ge 1$，設 $P(\theta) = a_n\theta^n + \cdots + a_0$，其中 $a_n \ne 0$。當 $\theta \ne 0$ 時，

$$P(\theta) = a_n\theta^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n\theta} + \cdots + \frac{a_0}{a_n\theta^n}\right),$$

當 $\theta \to \infty$ 時，括號內的式子趨向 1，而 $|a_n\theta^n| \to \infty$。所以 $|P(\theta)| \to \infty$，我們可以選一個 θ 使得 $|P(\theta)| > 2$。對這個 θ，由於 $|\cos\theta| \le 1$，

$$|P(\theta) - \cos\theta| \ge |P(\theta)| - |\cos\theta| > 2 - 1 = 1 > 10^{-6}.$$

在兩種情況下，該不等式都會在某處不成立，所以這樣的多項式並不存在。

想一想 可是 $\cos\theta$ 的麥克勞林級數（Maclaurin series）是一個類似多項式的和，而且可以要多接近就有多接近。為甚麼把它截斷不行呢？

在任何固定的有界區間（bounded interval）上，只要取足夠多項，截斷後的麥克勞林級數與 $\cos\theta$ 的差距*確實*在 10^{-6} 之內。但命題要求的是同一個多項式對*所有*實數 θ 都適用，而每一個非常數多項式最終都會奔向 $\pm\infty$，$\cos\theta$ 卻始終困在 $[-1,1]$ 之內。正是「對所有實數 θ」這幾個字令命題為假。

第 (iv) 部分：真

對 $x>0$，

$$x^4+3+x^{-4}-5=x^4-2+x^{-4}=\left(x^2-x^{-2}\right)^2\geq 0,$$

因為實數的平方必為非負數。因此對所有 $x>0$ 都有 $x^4+3+x^{-4}\geq 5$，而等號恰好在 $x^2=x^{-2}$ 時成立，即 $x=1$ 時。（另一個做法：由算術平均—幾何平均不等式（AM–GM inequality）得 $x^4+x^{-4}\geq 2\sqrt{x^4\cdot x^{-4}}=2$。）

總結：(i) 真，(ii) 假，(iii) 假，(iv) 真。

驗算

- (i)：取 $a=2$、$b=3$，$2^{\ln 3}$ 和 $3^{\ln 2}$ 都約等於 2.141；隨機選取正數 a,b，兩邊相符，相對誤差約為 10^{-15}。
- (ii)：在一整個週期內對 θ 取樣，$\cos(\sin\theta)-\sin(\cos\theta)$ 從未低於約 0.107。
- (iii)：cos 的 20 次麥克勞林多項式在 $\theta=1$ 時很準確，但在 $\theta=10$ 時誤差約為 7.5，在 $\theta=30$ 時誤差約為 10^{11}。
- (iv)：在細密的格點上，x^4+3+x^{-4} 的最小值是 5，在 $x=1$ 時取得。

常見錯誤

- 只檢查幾個數值就想「證明」一個假命題，或者因為代數運算出錯而「否證」了一個真命題：動筆之前，先判斷每一部分是真是假。
- 在 (iii) 中忘記了常數多項式：「趨向無窮」的論證需要次數至少為 1。
- 在 (iii) 中引用泰勒級數（Taylor series），把它當作處處適用的多項式；它並不是。

STEP 之外

第 (iii) 部分與魏爾斯特拉斯逼近定理（Weierstrass approximation theorem）形成對比：在任何有界閉區間上，每一個連續函數（continuous function）都可以用多項式一致逼近（uniform approximation），精確度要多高就有多高。但在整條實數線上一致逼近是不可能的，原因正是上面的增長論證。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本實分析入門書）討論了魏爾斯特拉斯定理和一致收斂（uniform convergence）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。