詳細解答

STEP I 1998，第 2 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP I 1998，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q2

關鍵思路

那個不好處理的式子 $(x^2+1)^{1/2}+x$ 位於 f 之內，所以最自然的做法就是把它整個設為 t。出人意表的是，這個關係很容易反過來解：先把根式單獨移到一邊再平方，x^2 項便會互相抵消，剩下的 x 只是 t 的一個簡單函數。第一條恆等式（identity）一旦到手，第二個積分不過是 $\mathrm{f}(t)=t^{-3}$ 的特殊情況。

解答

變數代換

設

$$t=(x^2+1)^{1/2}+x.$$

當 x 由 0 走到 ∞ 時，$(x^2+1)^{1/2}$ 和 x 都在遞增，所以 t 嚴格遞增（strictly increasing），由 $x=0$ 時的 $t=1$ 出發，並隨 $x\to\infty$ 趨向 ∞。因此這個代換（substitution）是由 $[0,\infty)$ 到 $[1,\infty)$ 的一對一（one-to-one）滿射，新的積分上下限是 1 和 ∞。

> ? **想一想** 怎樣把 x 用 t 表示出來？

把平方根單獨移到一邊，然後平方：由 $t-x=(x^2+1)^{1/2}$ 得

$$t^2-2tx+x^2=x^2+1 \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{t^2-1}{2t}=\frac{1}{2}(t-t^{-1}),$$

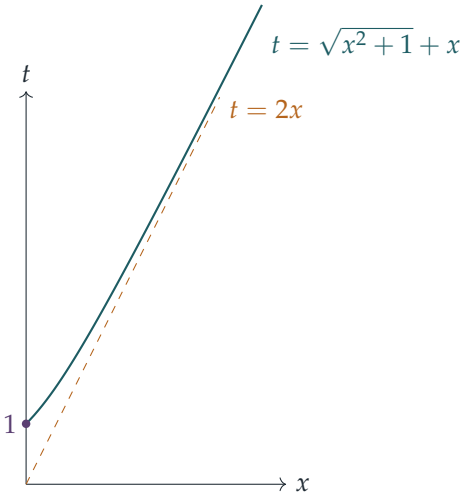
其中因為 $t\geq 1$，除以 t 並無問題。（平方可能會引入增根，但這裏 $t-x=(t+t^{-1})/2>0$，所以我們平方的那個根確實是正數。）求導得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}(1+t^{-2}).$$

因此

$$\int_0^\infty \mathrm{f}((x^2+1)^{1/2}+x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \mathrm{f}(t)\cdot\frac{1}{2}(1+t^{-2})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^\infty (1+t^{-2})\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t,$$

這正是所求的恆等式。



從草圖可見，t 由 1 開始穩定上升，所以值域中沒有任何部分被重複覆蓋。

最後部分

取 $\mathrm{f}(t) = t^{-3}$。恆等式的左邊正好就是我們要求的積分，所以

$$\begin{aligned}\int_0^\infty ((x^2+1)^{1/2}+x)^{-3}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_1^\infty (t^{-3}+t^{-5})\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[-\tfrac{1}{2}t^{-2}-\tfrac{1}{4}t^{-4}\right]_1^\infty \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8},\end{aligned}$$

正如所求。兩個廣義積分（improper integral）都收斂（converge），因為 t^{-3} 和 t^{-5} 在 $[1,\infty)$ 上可積。

想一想 有沒有更簡潔的方法去理解這個代換？

有：設 $x = \sinh\theta$。這樣 $(x^2+1)^{1/2} = \cosh\theta$，所以 $t = \cosh\theta + \sinh\theta = \mathrm{e}^\theta$。我們的公式 $x = \frac{1}{2}(t - t^{-1})$ 其實就是 $\sinh\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^\theta - \mathrm{e}^{-\theta})$ 換了個樣子而已。

驗算

- 當 $x = 0$ 時，$t = 1$，而 $x = \frac{1}{2}(1-1) = 0$：反函數公式吻合。當 $x = \frac{3}{4}$ 時，$t = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2$，而 $\frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$。
- 當 x 很大時，$t \approx 2x$，所以最後部分的被積函數（integrand）表現得像 $(2x)^{-3}$，積分必定收斂。
- 數值上，對原來的積分使用辛普森法則（Simpson's rule）得 0.375000，與 $\frac{3}{8}$ 相符。第一部分的恆等式亦可用數值方法驗證：取 $\mathrm{f}(t) = \mathrm{e}^{-t}$（兩邊均為 0.258187）和 $\mathrm{f}(t) = 1/(1+t^4)$（兩邊均為 0.188387）時都成立。

常見錯誤

- 忘記更改積分上下限：下限變成 $t = 1$，而不是 $t = 0$。
- 把 $\mathrm{d}t$ 用 x 表示，然後苦苦設法消去 x；先把 x 用 t 表示，再對它求導，會容易得多。

STEP 之外

這條恆等式說的是在單調（monotonic）映射下的變數代換；在分析學中，對於廣義積分，這是透過取 $[0, X]$ 上積分的極限來證明其合理性的。這個代換本身就是 sinh 的反函數：$\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \operatorname{arsinh} x$，這正是 t 原來等於 $\mathrm{e}^{\operatorname{arsinh} x}$ 的原因。如欲參考有關廣義積分和代換的嚴謹論述，可參閱 Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（實分析入門）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。