詳細解答

STEP I 1998，第 14 題

概率與統計 • 幾何概率

> **STEP I 1998，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q14

關鍵思路

硬幣落在哪裏，完全取決於它的圓心落在哪裏。由於棋盤的圖案規則地重複，我們可以假設圓心在單獨一個 2×2 正方形內均勻分佈（uniformly distributed），於是每一種結果都對應該正方形內的一個區域。把「壓過一條線」和「蓋住一個交點」轉化為圓心與各條線及各個角的距離所滿足的條件，概率（probability）便變成面積，而這個面積是 a 的二次式，我們可以求其最大值。

解答

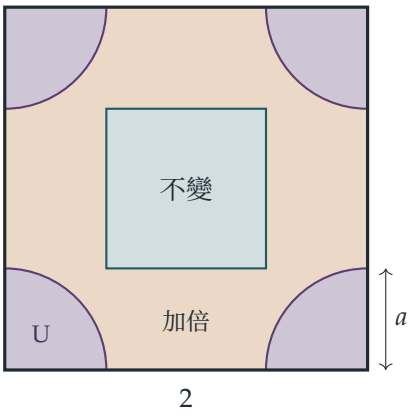
稅款加倍的概率

設硬幣的圓心均勻隨機地落在方格網的其中一個正方形內；棋盤很大，所以邊緣效應可以忽略，而且每個正方形看起來都一樣。在這個正方形上設立坐標，使它成為 $[0,2] \times [0,2]$，方格線沿着它的四邊。

設 U 為圓心到最近的垂直線的距離，V 為圓心到最近的水平線的距離。由於 x 坐標在 $[0,2]$ 上均勻分佈，$U = \min(x, 2-x)$ 在 $[0,1]$ 上均勻分佈；同理 V 在 $[0,1]$ 上均勻分佈，而且因為 x 與 y 獨立（independent），U 與 V 亦獨立。所以 (U,V) 在單位正方形 $[0,1]^2$ 上均勻分佈，而概率就是該正方形內的面積。

- 硬幣不壓過任何線，當且僅當 $U > a$ 且 $V > a$。其概率為 $(1-a)^2$。
- 硬幣蓋住一個交點，當且僅當正方形最近的一個角與圓心的距離小於 a，即 $U^2 + V^2 < a^2$。由於 $a < 1$，這個四分之一圓盤完全位於 $[0,1]^2$ 之內，所以概率為 $\frac{1}{4}\pi a^2$。

這兩個事件互斥（disjoint）：如果硬幣蓋住一個交點，它必定壓過通過該交點的線。（硬幣剛好碰到一條線之類的邊界情況，概率為零，所以用 $<$ 還是 $\leq$ 都沒有分別。）



圖中顯示圓心在一個正方形內的可能位置：藍綠色（沒有壓過任何線）和紫紅色（蓋住一個交點，在其中一個角標示為 U）的區域令稅款不變；琥珀色的區域令稅款加倍。

所以稅款加倍的概率為

$$\begin{aligned} p(a) &= 1-(1-a)^2-\tfrac{1}{4}\pi a^2 \\ &= 2a-\left(1+\frac{\pi}{4}\right)a^2. \end{aligned}$$

使稅收最大

要徵得最多的稅，就要令加倍的機會盡可能大，所以我們在 $0<a<1$ 的範圍內求 $p(a)$ 的最大值。它是一個首項係數為負的二次函數，而

$$p'(a)=2-2\left(1+\frac{\pi}{4}\right)a=0 \iff a=\left(1+\frac{\pi}{4}\right)^{-1}.$$

這個值是 $\frac{4}{4+\pi}\approx 0.560$，確實位於 $(0,1)$ 之內，而且由於 $p''(a)<0$，它給出最大值，正如題目所求。以 a^* 表示這個值，則有 $(1+\frac{\pi}{4})a^{*2}=a^*$，所以最大值為

$$p_{\max}=2a^*-a^*=a^*=\frac{4}{4+\pi}.$$

n 年後稅款的期望值

想一想 為甚麼每年的期望增長倍數是 $1+p$ 而不是 $2p$？

在稅款沒有加倍的年份，稅款維持不變，所以它是乘以 1，而不是乘以 0。設 M_k 為第 k

年的倍數：$M_k = 2$ 的概率為 p，$M_k = 1$ 的概率為 $1 - p$。於是

$$\mathrm{E}(M_k) = 2p + (1 - p) = 1 + p = 1 + \frac{4}{4 + \pi} = \frac{8 + \pi}{4 + \pi}.$$

假設每年的投擲互相獨立。n 年後的稅款為每頭 yak $T_n = M_1 M_2 \cdots M_n$ Slihings（由 1 開始），而獨立隨機變量（random variables）之積的期望值（expectation）等於它們各自期望值之積，所以

$$\mathrm{E}(T_n) = \mathrm{E}(M_1)\,\mathrm{E}(M_2) \cdots \mathrm{E}(M_n) = \left(\frac{8 + \pi}{4 + \pi}\right)^n,$$

正如題目所求。

驗算

- 當 $a \to 0$ 時，硬幣幾乎從不碰到任何線；當 $a = 1$ 時，它必定壓過一條線，所以 $p(1) = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.215$，即避開角上圓盤的機會。兩者都與公式吻合，而最大值位於兩者之間。
- 以 400 000 個隨機圓心進行模擬，在 $a = 0.56$ 時得出 $p \approx 0.5620$，而公式給出 0.5601。對 a 作精細搜尋，得出最大值位於 $a \approx 0.5601 = 4/(4 + \pi)$。
- 以 $p = 4/(4 + \pi)$ 模擬每年的加倍，得出 3 年後稅款的平均值約為 3.805，而 $\left(\frac{8+\pi}{4+\pi}\right)^3 \approx 3.797$。

常見錯誤

- 從「不壓線」的面積中減去「蓋住交點」的面積，或者把它計算了兩次。這兩個事件互斥，兩者都要從 1 中減去。
- 在每個角使用整個圓盤的面積 πa^2，忘記了只有四分之一位於正方形之內（等價地說，每個角上的圓盤由四個正方形共用）。
- 把稅款的期望值寫成 $(2p)^n$，忘記了沒有加倍的年份稅款維持不變。

STEP 之外

這是蒲豐投針問題（Buffon's needle problem）的近親：把隨機放置的物件化為基本區域（fundamental region）內的一個隨機點，概率便成為面積。這個想法是幾何概率（geometric probability）和積分幾何（integral geometry）的起點，由此可得出一些出人意表的結果，例如以投針來估算 π。最後一部分用到獨立隨機變量的期望值可以相乘這個

事實，這正是金融學和種羣生物學中乘法增長模型的基礎。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率入門）涵蓋了這兩個想法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。