詳細解答

STEP I 1998，第 12 題

概率與統計 • 計數與獨立性

STEP I 1998，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/98-s1-q12

關鍵思路

這一題從頭到尾都是計數（counting）。只要知道解的總數，以及其中有多少個解的 X 等於某個指定的值，每個概率（probability）就是兩個數目之比。至於獨立性（independence），最快捷的檢驗方法是考慮一個極端情況：找出一對數值，使聯合概率（joint probability）根本不可能等於邊際概率（marginal probability）之積。最後一部分中，「XYZ 可被 5 整除」的意思是「X, Y, Z 之中最少有一個可被 5 整除」，這就要用上容斥原理（inclusion–exclusion）。

解答

數算解的數目

若固定 $X = x$（其中 $0 \le x \le 20$），則 Y 可取 $0, 1, \ldots, 20 - x$ 中的任何一個值，而 $Z = 20 - x - Y$ 隨之確定，並且是非負數。因此恰好有 $21 - x$ 個解滿足 $X = x$，而解的總數為

$$N = \sum_{x=0}^{20} (21 - x) = 21 + 20 + \cdots + 1 = \frac{21 \cdot 22}{2} = 231.$$

（這正是「隔板法」（stars and bars）的數目 $\binom{22}{2}$：把 20 顆星和 2 塊隔板排成一行。）每個解的概率均為 $1/231$，而

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{21 - x}{231}, \qquad x = 0, 1, \ldots, 20.$$

根據對稱性（symmetry），Y（以及 Z）有相同的分佈（distribution）。

X 與 Y 是否獨立？

不是。取 $X = 20$ 和 $Y = 20$。這兩個事件各自都有可能發生：

$$\mathrm{P}(X = 20) = \mathrm{P}(Y = 20) = \frac{1}{231} > 0,$$

但兩者不可能同時發生，因為 $X + Y \leq 20$。所以

$$\mathrm{P}(X = 20,\ Y = 20) = 0 \neq \frac{1}{231^2} = \mathrm{P}(X = 20)\,\mathrm{P}(Y = 20),$$

故 X 與 Y 並不獨立。直觀地說，X 的值越大，留給 Y 的空間就越少。

> ? **想一想** 只說「$X + Y \leq 20$，所以它們顯然是相關的」不就夠了嗎？

想到這樣的限制條件，直覺是對的；但獨立性是一個關於概率的精確陳述，所以論證時應該舉出一對數值，使得 $\mathrm{P}(X = x, Y = y) \neq \mathrm{P}(X = x)\mathrm{P}(Y = y)$。只需一個反例（counterexample）便已足夠，而 $(20, 20)$ 這對極端數值令計算變得輕而易舉。

X 可被 5 整除

範圍內 5 的倍數為 $X = 0, 5, 10, 15, 20$，對應的解分別有 $21, 16, 11, 6, 1$ 個。所以

$$\mathrm{P}(5 \mid X) = \frac{21 + 16 + 11 + 6 + 1}{231} = \frac{55}{231} = \frac{5}{21},$$

正如題目所求。

XYZ 可被 5 整除

由於 5 是質數（prime），$5 \mid XYZ$ 當且僅當 5 整除 X、Y、Z 之中最少一個。（謹記 0 也算是可被 5 整除。）設 A、B、C 分別為 X、Y、Z 可被 5 整除的解所組成的集合。由上一部分可知 $|A| = |B| = |C| = 55$。

考慮 $A \cap B$：設 $X = 5a$、$Y = 5b$，其中 $a, b \geq 0$ 且 $a + b \leq 4$。這樣的數對共有 $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ 個。在每一個情況下，$Z = 20 - 5a - 5b$ 同樣是 5 的倍數，所以

$$|A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = |A \cap B \cap C| = 15.$$

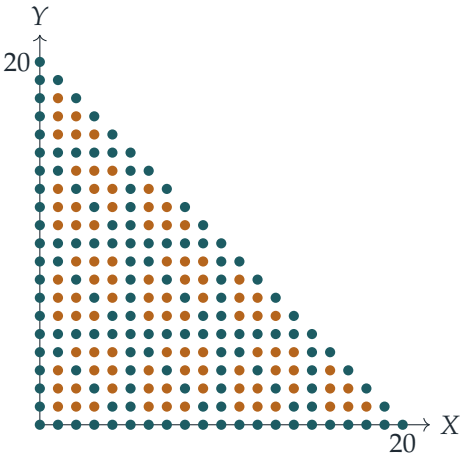
根據容斥原理，

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= 3 \cdot 55 - 3 \cdot 15 + 15 \\ &= 135, \end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{P}(5 \mid XYZ) = \frac{135}{231} = \frac{45}{77}.$$

下圖把各個解表示為滿足 $X+Y \le 20$ 的格點（lattice point）(X,Y)。藍綠色的點位於直線 $X=5k$、$Y=5k$ 或 $X+Y=20-5k$（即 $Z=5k$）其中之一上，而琥珀色的點則是 X,Y,Z 全都不是 5 的倍數的 96 個解。



驗算

- 補集（complement）應有 $231-135=96$ 個解，其中 X,Y,Z 全都不是 5 的倍數：這就是圖中琥珀色的點。用電腦列出全部 231 個解，並以精確分數計算，可確認 96、$|A\cap B|=15$、5/21 以及 $135/231=45/77\approx 0.584$ 均正確。
- 對 5/21 作一個合理性檢查：X 可被 5 整除的概率比 1/5 稍大，因為 X 取較小的值的可能性最高，而 $X=0$ 更是最有可能出現的值。

常見錯誤

- 忘記 0 可被 5 整除。漏掉 $X=0$ 會得出 34/231，而不是 5/21。
- 直接計算 $3\times\frac{5}{21}$，這樣會把重疊的部分重複計算多次。本題的重疊部分相當大：只要其中兩個變量是 5 的倍數，第三個也必然是。
- 論證兩者相關時，沒有舉出一對令乘法法則不成立的具體數值。

STEP 之外

從所有解中均勻隨機地選取一個，等同於隨機選取 20 分成三部分的一個有序分拆（composition）。若把 20 換成總和 n，並讓 n 增大，$(X/n,Y/n)$ 便會趨於在一個三角形上均勻分佈，這是狄利克雷分佈（Dirichlet distribution）最簡單的情況。容斥原理是處理「最

少一個」這類事件的標準工具，它還會在錯排（derangement）和歐拉函數（Euler's totient function）中再次出現。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）對計數和獨立性這兩方面的概念均有論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。