詳細解答

STEP I 1998，第 11 題

力學 • 跨過滑輪的連接質點

> **STEP I 1998，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q11

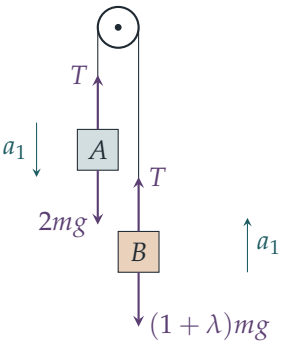
關鍵思路

每次往返分為兩個階段，而在每個階段中各質量保持不變，所以加速度是常數，可以使用 $s = \frac{1}{2}at^2$。下行時，盛滿水的桶比礦石連桶更重，兩者合起來就是一部阿特伍德機（Atwood machine）。回程上行時，桶 A 是空的而且沒有質量，所以沒有任何東西拉住 B：它只是自由下墜（falls freely）。至於第二部分，「在很長的時間內運上最多礦石」的意思是「每個循環運上的礦石量除以每個循環所需的時間要最大」。

解答

一個循環所需的時間

模型：兩個桶連同所盛之物視為質點（particle），鏈是輕而不可伸長的（light and inextensible），滑輪細小、光滑而且輕。因此鏈兩端的張力（tension）T 相同，而兩個桶以相同的速率運動。當 A 在頂部時，B 在底部（鏈的長度為 l），所以每個階段中每個桶都移動距離 l。



第 1 階段：A 下降。桶 A 盛有質量 $2m$ 的水；桶 B 的總質量為 $m+\lambda m=(1+\lambda)m$。設 a_1 為兩者共同的加速度（A 向下，B 向上）。對每個桶應用牛頓第二定律（Newton's second law），得

$$\begin{aligned} A\text{ (向下)}: &\quad 2mg-T=2ma_1,\\ B\text{ (向上)}: &\quad T-(1+\lambda)mg=(1+\lambda)ma_1. \end{aligned}$$

兩式相加消去 T：

$$(1-\lambda)mg=(3+\lambda)ma_1 \quad\Longrightarrow\quad a_1=\frac{(1-\lambda)g}{3+\lambda},$$

由於 $\lambda<1$，這個值是正數，所以 A 確實下降。由靜止出發，以恆加速度移動距離 l，有 $l=\frac{1}{2}a_1t_1^2$，所以

$$t_1=\sqrt{\frac{2l}{a_1}}=\sqrt{\frac{2l}{g}}\sqrt{\frac{3+\lambda}{1-\lambda}}.$$

? **想一想** 在第 2 階段，桶 A 完全沒有質量。鏈的張力是多少？

第 2 階段：B 下降。現在 A 是空的，所以它的質量為零，而 B 的質量為 m。對沒有質量的桶 A，牛頓定律給出 $T-0\cdot g=0\cdot a$，所以 $T=0$：一條輕鏈若另一端繫着的東西沒有質量，就無法拉動任何物體。因此 B 由靜止以加速度 g 自由下墜，經過距離 l，由 $l=\frac{1}{2}gt_2^2$ 得

$$t_2=\sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

（用阿特伍德機的公式，取質量為 0 和 m，也得到同樣的答案：$a=\frac{m-0}{m+0}g=g$。）這個階段結束時，A 第一次回到頂部。

總時間。由在頂部釋放 A 起，到它第一次回到頂部為止，所需的時間為

$$\boxed{t_1+t_2=\sqrt{\frac{2l}{g}}\left(1+\sqrt{\frac{3+\lambda}{1-\lambda}}\right)=\sqrt{\frac{2l}{g}}\,\frac{(1-\lambda)^{1/2}+(3+\lambda)^{1/2}}{(1-\lambda)^{1/2}}}$$

使運上的礦石量最大

以 $\tau(\lambda)=t_1+t_2$ 表示循環時間。每個循環運上質量為 λm 的礦石，而整個過程不斷以完全相同的方式重複。在一段很長的時間 S 內，共有 $\lfloor S/\tau\rfloor$ 個完整循環，所以運上的礦石量介乎 $\lambda m\,(S/\tau-1)$ 與 $\lambda m\,S/\tau$ 之間。當 S 遠大於 τ 時，那個未完成的循環所損失的部分可以忽略，運上的礦石量基本上就是

$$\frac{\lambda mS}{\tau(\lambda)}=mS\sqrt{\frac{g}{2l}}\,\frac{\lambda(1-\lambda)^{1/2}}{(1-\lambda)^{1/2}+(3+\lambda)^{1/2}}=mS\sqrt{\frac{g}{2l}}\,\mathrm{f}(\lambda).$$

因子 $mS\sqrt{g/2l}$ 與 λ 無關，所以我們必須選取 $\lambda\in(0,1)$，使 $\mathrm{f}(\lambda)$ 盡可能大。

想一想 為甚麼最佳的 λ 必定是駐點（stationary point），而不是端點？

函數 f 在 $(0,1)$ 上可導（differentiable），因為在該區間內 $1-\lambda>0$ 和 $3+\lambda>0$，而且分母是正數。它在 $(0,1)$ 上取正值，並且在兩端都趨向 0：當 $\lambda\to 0$ 時，因子 λ 趨向零（沒有運載礦石）；當 $\lambda\to 1$ 時，因子 $(1-\lambda)^{1/2}$ 趨向零（兩個桶幾乎平衡，所以第 1 階段需時極長）。因此 f 的最大值在區間內部的某一點取得，而可導函數若在內點取得極大值，該處的導數必為零。所以最佳的 λ 滿足 $\mathrm{f}'(\lambda)=0$，這正是所要證明的。

驗算

- 極限情況：當 $\lambda\to 1$ 時，第 1 階段中兩個桶的質量分別為 $2m$ 和 $2m$，所以 $a_1\to 0$ 而 $t_1\to\infty$，與公式吻合。
- 當 $\lambda\to 0$ 時，得 $a_1=g/3$，正是質量為 $2m$ 和 m 的阿特伍德機的慣常數值。
- 數值上，取 $g=9.8$，對隨機選取的 λ 和 l 逐步模擬運動，結果與公式一致：例如 $\lambda=0.504$、$l=26.9$ 給出的循環時間為 8.568 s。以數值方法求 f 的最大值，得 $\lambda\approx 0.704$；而在一段很長的時間內點算完整循環的數目，也得到同一個最佳的 λ。

常見錯誤

- 忘記了桶 B 本身的質量 m，在第 1 階段用了 λm 而不是 $(1+\lambda)m$。
- 把第 2 階段當作帶有某個張力的阿特伍德機來處理：由於 A 沒有質量，B 是自由下墜的。
- 求每個循環運上的礦石量 λm 的最大值，而不是每單位時間運上的礦石量的最大值。載得愈重，循環愈慢。

STEP 之外

把一個速率（每個循環的產出除以每個循環的時間）最優化，正是概率論中*更新報酬定理*（renewal–reward theorem）背後的想法：在那裏循環的長度是隨機的，而長遠的報酬率仍然等於每個循環的平均報酬除以平均循環長度。這裏的力學是恆加速度運動，Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）由此出發，發展成對質點系統的完整論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。