詳細解答

STEP I 1998，第 10 題

力學 • 拋體運動

STEP I 1998，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/98-s1-q10

關鍵思路

我們不知道拋射角，也不需要知道：答案只以 v、r 和 t 表示。因此要找一條能消去這個角的關係式。最簡潔的做法是用向量（vector）來思考：質點（particle）經過時間 t 後的落點，等於初速度乘以 t，再加上重力造成的下墜 $\frac{1}{2}gt^2$。這三個向量構成一個直角三角形，餘下的工夫交給畢氏定理（Pythagoras' theorem）就可以了。

解答

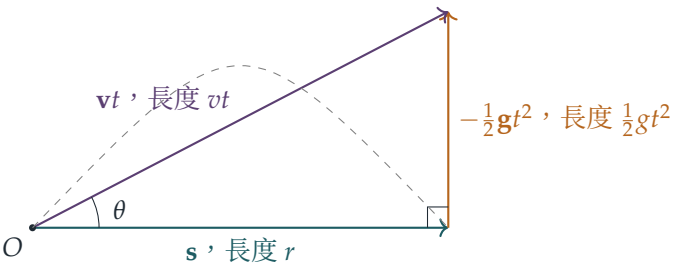
我們把每一粒泥土看成一個質點，只受重力作用而自由運動（不計空氣阻力），由位於地面的爆炸中心 O 出發。垂直向上射出的質點會落在 O，所以可取 $r > 0$，並設拋射角（angle of projection）θ 為與水平方向所成的仰角，其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$。

著地時間

在恆定加速度 $\mathbf{g}$（垂直向下）之下，經過時間 t 後的位移（displacement）為

$$\mathbf{s} = \mathbf{v}t + \tfrac{1}{2}\mathbf{g}t^2,$$

其中 $\mathbf{v}$ 是初速度，其大小為 v。在著地的一刻，$\mathbf{s}$ 是水平的，長度為 r。移項後得 $\mathbf{v}t = \mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$，即一個長度為 r 的水平向量與一個長度為 $\frac{1}{2}gt^2$ 的垂直（向上）向量之和。



這兩個向量互相垂直，所以根據畢氏定理，

$$v^2t^2 = r^2 + \left(\tfrac{1}{2}gt^2\right)^2 = r^2 + \tfrac{1}{4}g^2t^4.$$

兩邊乘以 g^2，並設 $u = \frac{1}{2}g^2t^2$（於是 $u^2 = \frac{1}{4}g^4t^4$ 及 $g^2v^2t^2 = 2v^2u$），上式變成

$$u^2 - 2v^2u + g^2r^2 = 0,$$

這是 u 的二次方程（quadratic）。它的根為

$$\tfrac{1}{2}g^2t^2 = u = v^2 \pm \sqrt{v^4 - g^2r^2},$$

這正是所要求的結果。

想一想 如果不用向量，我們怎樣消去 θ？

用分量（components）。水平方向有 $r = vt\cos\theta$；垂直方向，落在地面即表示 $0 = vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$，所以 $vt\sin\theta = \frac{1}{2}gt^2$（因為 $t \neq 0$）。把兩式平方後相加，再利用 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$，便再次得到 $v^2t^2 = r^2 + \frac{1}{4}g^2t^4$。向量圖不過是把這個計算畫成一個三角形而已。

只有當 $v^4 \geq g^2r^2$，即 $r \leq v^2/g$ 時，兩個根才都是實數：這就是大家熟悉的最大射程（maximum range）。當 $r < v^2/g$ 時，兩個根都是正數（兩根之積為 $g^2r^2 > 0$，兩根之和為 $2v^2 > 0$），所以有兩個著地時間，一個屬於高拋，一個屬於平射。由於 $t = 2v\sin\theta/g$ 隨 θ 遞增，$+$ 號對應較陡的軌跡（trajectory），即 $\theta > \frac{\pi}{4}$，而 $-$ 號則對應較平的軌跡。

最大高度

整段飛行是對稱的：垂直速度 $v\sin\theta - gt'$ 在 $t' = \frac{1}{2}t$ 時為零，即飛行的中途。由最高點起，質點（在垂直方向上）由靜止下墜，歷時 $\frac{1}{2}t$，所以最大高度為

$$H = \tfrac{1}{2}g\left(\tfrac{1}{2}t\right)^2 = \tfrac{1}{8}gt^2 = \frac{1}{4g}\cdot\tfrac{1}{2}g^2t^2.$$

利用第一部分的結果，

$$H = \frac{v^2 \pm \sqrt{v^4 - g^2r^2}}{4g},$$

其中 $+$ 號對應較陡的軌跡，$-$ 號對應較平的軌跡（當 $r < v^2/g$ 時兩者皆有可能；當 $r = v^2/g$ 時兩者重合，此時 $H = v^2/(4g)$）。

驗算

- 垂直發射：$r = 0$ 給出 $\frac{1}{2}g^2t^2 = 2v^2$，所以 $t = 2v/g$，而 $H = v^2/(2g)$，與預期相符。另一個根 $t = 0$、$H = 0$，則是貼着地面掠過的一擊。
- 兩個高度之和為 $v^2/(2g)$。這是理所當然的：兩條軌跡的拋射角互為餘角，即 θ 和 $\frac{\pi}{2} - \theta$，而 $\frac{v^2\sin^2\theta}{2g} + \frac{v^2\cos^2\theta}{2g} = \frac{v^2}{2g}$。
- 數值上，取 $g = 9.8$、$v = 20$ 和 $\theta = 1$ 弧度，逐步模擬運動可得 $t \approx 3.4346$ 和 $H \approx 14.450$；取 $+$ 號的公式給出 3.4346 和 14.450。餘角的情況則與 $-$ 號吻合（$t \approx 2.2053$，$H \approx 5.958$）。

常見錯誤

- 只給出一個高度。速率相同的質點可以沿兩條不同的路徑到達同一點，而 $\pm$ 號會一直帶到 H 的式子裏。
- 把 H 寫成 θ 的式子便停下來。題目只要求以 v、r 和 g 表示，所以藉 $H = \frac{1}{8}gt^2$ 這條關係式連繫到第一部分，才是最省力的途徑。

STEP 之外

這個關於 t^2 的二次方程，是「軌跡的包絡線（envelope）」在時域上的版本：滿足 $v^4 = g^2r^2$ 的點（以及離開地面時的拋物面（paraboloid）$z = \frac{v^2}{2g} - \frac{gr^2}{2v^2}$）標示出泥土所能到達的區域的邊界，而在這個區域內，每一點都恰好有兩條軌跡經過。曲線族的包絡線，是大學一年級課程中偏微分（partial differentiation）的一個漂亮應用。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）以恰到好處的程度講解拋體運動（projectile motion）和向量運動學。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。