詳細解答

STEP I 1998，第 1 題

純數學 • 數字模式的計數

> **STEP I 1998，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q1

關鍵思路

不要嘗試把數逐個列出。應該先選定出現的是哪兩個數字，再點算同時用上這兩個數字的五位數字串（string）。唯一的麻煩是一個數不能以 0 開頭，所以我們按 0 是否兩個數字之一來分開點算。另外，別忘了檢查範圍的兩端。

解答

由 10 000 到 99 999 的每個整數都恰好有五位，而且首位數字不是零。範圍內餘下的唯一整數是 100 000，我們留到最後處理。

一個五位數恰好含有兩個不同的數字，即是說它的所有數字都來自某一對 $\{a, b\}$，而且 a 和 b 都確實出現。每個這樣的數都決定了它所屬的那一對，所以我們可以逐對點算，然後相加。

情況 1：兩個數字都不是 0

從 $1, 2, \ldots, 9$ 中選出兩個不同的數字，共有 $\binom{9}{2} = 36$ 種選法。對於固定的一對 $\{a, b\}$，五個位置各自可以是 a 或 b，得出 $2^5 = 32$ 個數字串。其中兩個只用了一個數字（$aaaaa$ 和 $bbbbb$），所以有 $32 - 2 = 30$ 個同時用上兩個數字。它們全都不以 0 開頭，所以這 30 個都是真正的五位數。這個情況得出

$$36 \times 30 = 1080.$$

> ? **想一想** 為甚麼不能用完全相同的方法處理 $\{0, a\}$ 這一對？

因為在 32 個由 0 和 a 組成的數字串之中，有一半以 0 開頭，而這些並不是五位數（例如

$0a0aa$ 其實是一個四位數）。所以我們必須先固定首位數字，然後才點算。

情況 2：其中一個數字是 0

另一個數字 a 可以是 $1,\ldots,9$ 中的任何一個，共 9 種選擇。首位數字不能是 0，所以必定是 a。餘下四個位置各自可以是 0 或 a，得出 $2^4 = 16$ 種可能。當中恰好有一個，即 $aaaa$，不含 0，這樣整個數便只有一個不同的數字。所以對每個 a 都有 $16 - 1 = 15$ 個數，這個情況得出

$$9 \times 15 = 135.$$

端點 100 000

這個範圍包括兩個端點，而 100 000 只用了 1 和 0 這兩個數字，所以它也要計算在內。

總數

$$1080 + 135 + 1 = 1216.$$

所以這樣的整數共有 **1216** 個。

驗算

- 用電腦檢查由 10 000 到 100 000 的每一個整數，點算其中數字所組成的集合大小為 2 的數，結果是 1216。這也印證了上面的分拆：1080 個不含 0，135 個含有它，再加上 100 000。
- 把同一方法用於一個可以用手逐一列出的較小情況。對於兩位數，這方法得出 $\binom{9}{2}(2^2 - 2) + 9(2^1 - 1) = 72 + 9 = 81$。這與直接點算的結果吻合：共有 90 個兩位數，減去 9 個各位數字相同的數（repdigit）$11, 22, \ldots, 99$。

常見錯誤

- 忘記了 100 000，得出 1215。遇到「包括首尾」的範圍，務必留意兩個端點。
- 計算成 $\binom{10}{2} \times 30 = 1350$，這把以 0 開頭的數也算了進去。
- 在情況 2 中減去 2 而不是 1：全是零的數字串在我們把首位數字固定為 a 時已經排除了。

STEP 之外

從所有由 $\{a,b\}$ 組成的數字串中減去只用一個數字的數字串，這個技巧是容斥原理（inclusion–exclusion principle）最簡單的情況。一般而言，長度為 n 而且用上全部 k 個給定符號的字串，數目是 $\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n$，也就是 $k!$ 乘以一個第二類斯特靈數（Stirling number of the second kind）。這類點算結果在組合數學（combinatorics）和概率（probability）中隨處可見，例如優惠券收集問題（coupon collector problem）。想多做這類點算題，可以試試 Grimmett and Welsh 的 *Probability: An Introduction*，或者 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 中的組合數學題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。