詳細解答

STEP III 1997，第 9 題

力學 • 涉及彈簧的靜力學

STEP III 1997，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s3-q9

關鍵思路

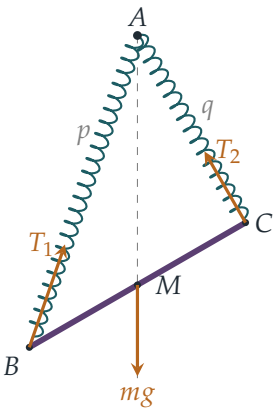
作用在桿上的力只有三個：兩條彈簧的張力（tension）和桿本身的重量。當一個物體在三個互不平行的力作用下處於平衡（equilibrium）時，這三個力的作用線（line of action）必定通過同一點。兩個張力的作用線都通過 A，所以重量的作用線也必須通過 A，亦即桿的中點位於 A 的正下方。之後，沿水平方向分解力，幾乎就完成餘下的工作。

解答

我們把桿視為均勻（uniform）的剛體（rigid body），質量為 m，中點為 M。兩條彈簧都是輕彈簧，遵從虎克定律（Hooke's law），彈簧常數同為 κ，而且都處於拉伸狀態。設彈簧 AB 和 AC 的自然長度（natural length）分別為 a 和 b，拉伸後的長度分別為 p 和 q，則張力為

$$T_1 = \kappa(p-a), \qquad T_2 = \kappa(q-b),$$

由於彈簧都被拉長，兩者皆為正數。



第 1 步：M 位於 A 的正下方

對桿取關於 A 的力矩（moment）。張力 T_1 沿 BA 作用，T_2 沿 CA 作用，所以兩條作用線都通過 A，兩者關於 A 的力矩均為零。因此，垂直通過 M 的重量關於 A 的力矩也必須為零，即通過 M 的鉛垂線通過 A。於是 M 位於 A 的正下方；設它在 A 下方的深度為 $h > 0$。

第 2 步：沿水平方向分解

以 A 為原點建立坐標軸，x 軸為水平方向（在桿所在的鉛垂平面內），y 軸鉛垂向上。則 $M = (0, -h)$，而由於 M 是 BC 的中點，我們可以寫成

$$B = (-d,\ -h-e), \qquad C = (d,\ -h+e)$$

其中 d、e 為某些常數。這裏 d 是桿在水平方向上的半闊度，而 $d \neq 0$ 正是因為桿並非鉛垂。

AB 中的張力作用於桿上的 B 點，方向由 B 指向 A，即沿向量 (vector) $\overrightarrow{BA} = (d,\ h+e)$，其長度為 p。所以這個力是 $\dfrac{T_1}{p}(d,\ h+e)$。同理，在 C 點的張力是 $\dfrac{T_2}{q}(-d,\ h-e)$。

沿水平方向分解，得

$$\frac{T_1}{p}\,d - \frac{T_2}{q}\,d = 0,$$

而由於 $d \neq 0$，

$$\frac{T_1}{p} = \frac{T_2}{q}.$$

? **想一想** 我們究竟在哪裏用到「桿並非鉛垂」這個事實？

只在約去 d 的時候。假如桿鉛垂懸掛，兩條彈簧便會落在同一條鉛垂線上，水平方向的

分解式只會變成 $0 = 0$，而兩個張力可以成任何比例，只需滿足鉛垂方向的平衡。這種鉛垂的平衡狀態確實會出現，而在這些情況下，結論一般並不成立。

第 3 步：引入虎克定律

代入張力，得

$$\frac{\kappa(p-a)}{p} = \frac{\kappa(q-b)}{q} \quad \Longrightarrow \quad 1 - \frac{a}{p} = 1 - \frac{b}{q} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{p} = \frac{b}{q},$$

所以

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b}.$$

拉伸後長度之比等於自然長度之比，這正是所要證明的。 ■

為完整起見，沿鉛垂方向分解可得 $\frac{T_1}{p}(h+e) + \frac{T_2}{q}(h-e) = mg$，即 $2h\frac{T_1}{p} = mg$。我們用不着這條式，但它確定了 $T/$長度 這個共同的值。

驗算

- 詮釋。由於 $p/q = a/b$，兩條彈簧都按相同的倍數伸長：對某個 $\lambda > 1$，有 $p = \lambda a$ 及 $q = \lambda b$。所以這兩條彈簧就像一條均勻的彈簧按比例放大一樣，這是記住答案的一個好方法。
- 數值檢驗。我們隨機選取 m, κ, a, b 和桿的長度，以數值方法求勢能（potential energy）$mgy_M + \frac{1}{2}\kappa(p-a)^2 + \frac{1}{2}\kappa(q-b)^2$ 的最小值，從而找出平衡狀態。例如，當 $a/b = 0.709972$ 時，一個傾斜的平衡狀態給出 $p/q = 0.709972$，而 M 位於 A 的正下方，誤差在 10^{-7} 之內。同一次搜尋亦找到一些 $p/q \neq a/b$ 的鉛垂平衡狀態（例如 $a/b = 1.526$ 但 $p/q = 1.192$），這證實了題目的假設確有必要。

常見錯誤

- 假設兩個張力相等，或假設兩條彈簧與鉛垂線所成的角相等。兩者一般都不成立；相等的是張力除以長度。
- 對 M 取力矩，結果糾纏於各個角度之中。對 A 取力矩簡潔得多，因為兩個張力的作用線都通過 A。
- 從沒用到「桿並非鉛垂」這個條件。完整的答案應指出哪裏需要這個條件。

STEP 之外

我們用到的向量 $\frac{T}{p}\overrightarrow{BA}$ 是表示彈簧力的自然寫法。自然長度為零的彈簧所施的力，恰好與位移向量成正比，而這類「理想」彈簧能把許多平衡問題化為線性代數（linear algebra）。更一般地說，平衡狀態是勢能的駐點（stationary point），這正是我們數值檢驗背後的想法，也是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）的起點。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對靜力學（statics）和能量觀點都有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。