詳細解答

STEP III 1997，第 8 題

純數學 • 二次型的對角化

> **STEP III 1997，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q8

關鍵思路

一個對稱矩陣（symmetric matrix）描述一個二次型（quadratic form）$ax^2+2bxy+cy^2$，而共軛（conjugate）後的矩陣 $R_{-\alpha}AR_\alpha$ 則描述同一個二次型在旋轉了 α 的坐標軸下的樣子。把它化成對角矩陣（diagonal matrix），xy 項便會消失，於是在新坐標軸下橢圓（ellipse）處於標準位置，其半軸（semi-axes）長度可以直接讀出。由於旋轉保持各點與原點的距離不變，這兩條半軸的長度正是我們要找的極端距離。

解答

全題記

$$R_\alpha=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\qquad R_{-\alpha}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=R_\alpha^{\mathsf T}.$$

第 (i) 部分

設 $C=\cos\alpha$ 及 $S=\sin\alpha$。首先

$$AR_\alpha=\begin{pmatrix}aC+bS & -aS+bC\\ bC+cS & -bS+cC\end{pmatrix},$$

再從左邊乘以 $R_{-\alpha}$，右上角的元素是

$$\begin{aligned}C(-aS+bC)+S(-bS+cC)&=b(C^2-S^2)-(a-c)SC\\&=b\cos 2\alpha-\tfrac12(a-c)\sin 2\alpha.\end{aligned}$$

因為 A 是對稱的，所以 $R_{-\alpha}AR_\alpha=R_\alpha^{\mathsf T}AR_\alpha$ 也是對稱的（它的轉置（transpose）就是它本身），故左下角的元素與右上角相同，一個條件便同時處理了兩者。這個矩陣是對角

矩陣，當且僅當

$$\tan 2\alpha = \frac{2b}{a-c} \quad (a \neq c), \qquad \text{故可取} \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}\arctan\frac{2b}{a-c}.$$

若 $a = c$，條件變成 $b\cos 2\alpha = 0$，取 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 即可（若同時有 $b = 0$，則 A 本身已是對角矩陣，任何 α 都可以）。

第 (ii) 部分

把橢圓的方程展開，得

$$x^2 + y^2 + 4xy\cot 2\theta + 4x^2\cot^2 2\theta = 1,$$

而 $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$。比較係數，得

$$a = 1 + 4\cot^2 2\theta, \qquad b = 2\cot 2\theta, \qquad c = 1.$$

於是 $a - c = 4\cot^2 2\theta \neq 0$（因為 $0 < 2\theta < \frac{1}{2}\pi$），並且

$$\frac{2b}{a-c} = \frac{4\cot 2\theta}{4\cot^2 2\theta} = \tan 2\theta,$$

所以 $\alpha = \theta$ 滿足第 (i) 部分的條件：$R_{-\theta}AR_\theta$ 是對角矩陣。

至於對角線上的元素，按第 (i) 部分同樣的乘法可得

$$\text{左上角} = aC^2 + 2bSC + cS^2, \qquad \text{右下角} = aS^2 - 2bSC + cC^2,$$

這裏 $C = \cos\theta$，$S = \sin\theta$。設 $k = \cot 2\theta$ 及 $\mu = \cos 2\theta$，並利用 $2SC = \sin 2\theta$、$k\sin 2\theta = \mu$、$C^2 = \frac{1}{2}(1+\mu)$、$S^2 = \frac{1}{2}(1-\mu)$ 以及 $k^2 = \mu^2/(1-\mu^2)$。對於右下角的元素，

$$\begin{aligned}(1+4k^2)S^2 - 2k\sin 2\theta + C^2 &= 1 + 4k^2S^2 - 2\mu \\ &= 1 - 2\mu + \frac{2\mu^2(1-\mu)}{(1-\mu)(1+\mu)} = \frac{(1-2\mu)(1+\mu)+2\mu^2}{1+\mu} \\ &= \frac{1-\mu}{1+\mu} = \frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta} = \tan^2\theta.\end{aligned}$$

用完全相同的方法，左上角的元素是 $1 + 2\mu + \dfrac{2\mu^2}{1-\mu} = \dfrac{1+\mu}{1-\mu} = \cot^2\theta$。所以

$$R_{-\theta}AR_\theta = \begin{pmatrix} \cot^2\theta & 0 \\ 0 & \tan^2\theta \end{pmatrix}.$$

想一想 有沒有快捷的方法，不必重做一次代數運算，也能確認這兩個元素是對的？

有。共軛不會改變矩陣的跡（trace）和行列式（determinant）。這裏 $\det A = ac - b^2 = 1 + 4k^2 - 4k^2 = 1$，而的確 $\cot^2\theta \tan^2\theta = 1$。另外 $\operatorname{tr} A = 2 + 4\cot^2 2\theta$，而由於 $\cot\theta - \tan\theta = \dfrac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 2\cot 2\theta$，

$$\cot^2\theta + \tan^2\theta = (\cot\theta - \tan\theta)^2 + 2 = 4\cot^2 2\theta + 2.$$

第 (iii) 部分

以 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ 引入新坐標，使 X 軸和 Y 軸就是原來的坐標軸旋轉 θ 所得。由於 $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} R_\theta^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} R_{-\theta}$，橢圓的方程變成

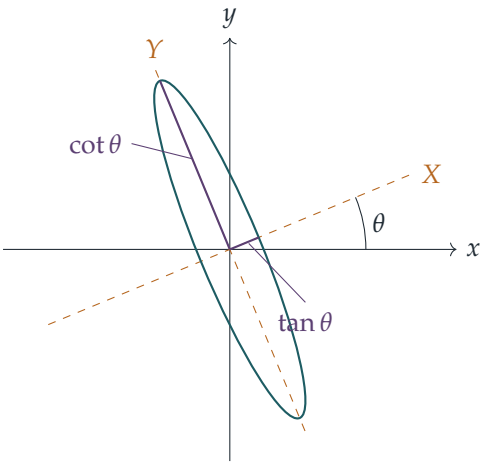
$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} R_{-\theta} A R_\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 1, \qquad \text{即} \qquad X^2\cot^2\theta + Y^2\tan^2\theta = 1.$$

這個方程在 $(X, Y) \mapsto (-X, -Y)$ 之下不變，所以橢圓的中心是原點。旋轉保持長度不變，因此中心到某一點的距離是 $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{X^2 + Y^2}$。

因為 $0 < \theta < \frac{1}{4}\pi$，我們有 $0 < \tan\theta < 1 < \cot\theta$，所以 $\tan^2\theta < \cot^2\theta$。對橢圓上任何一點，

$$\tan^2\theta\,(X^2 + Y^2) \;\le\; X^2\cot^2\theta + Y^2\tan^2\theta = 1 \;\le\; \cot^2\theta\,(X^2 + Y^2),$$

所以 $\tan^2\theta \le r^2 \le \cot^2\theta$，即 $\tan\theta \le r \le \cot\theta$。左邊的不等式在 $X = 0$ 時取等號，即在 $(X, Y) = (0, \pm\cot\theta)$；右邊的不等式在 $Y = 0$ 時取等號，即在 $(X, Y) = (\pm\tan\theta, 0)$。兩個界限都能達到，所以中心到橢圓的最短和最長距離分別是 $\tan\theta$ 和 $\cot\theta$，正如題目所求。



上圖所示為 $\theta = \frac{1}{8}\pi$ 的情況，虛線是旋轉後的坐標軸。

驗算

- $(0, \pm 1)$ 在橢圓上，而 $\tan\theta < 1 < \cot\theta$，與上述界限吻合。
- 當 $\theta = \frac{1}{8}\pi$ 時，長軸（major axis）的端點在原坐標下是 $\cot\theta\,(-\sin\theta, \cos\theta) = (-\cos\theta, \cos^2\theta/\sin\theta) \approx (-0.924,\ 2.230)$。這時 $\cot 2\theta = 1$，而 $0.924^2 + (2.230 - 1.848)^2 \approx 0.854 + 0.146 = 1$，正如所料。
- 數值上，對若干個 θ 值沿橢圓掃描 200 000 個方向，在 $\theta = 0.3$ 時得出最短距離 0.309336 和最長距離 3.232728，與 $\tan 0.3$ 和 $\cot 0.3$ 相符。

常見錯誤

- 把 xy 的係數當作 b 而不是 $2b$：二次型是 $ax^2 + 2bxy + cy^2$。
- 搞亂了哪個旋轉放在哪一邊：若 $\mathbf{x} = R_\theta \mathbf{X}$，行向量便是 $\mathbf{X}^{\mathsf{T}} R_{-\theta}$，這就是出現 $R_{-\theta} A R_\theta$ 的原因。
- 以為係數較大的那條軸較長：$\cot^2\theta X^2$ 的係數較大，所以橢圓在 X 方向上反而是短的。

STEP 之外

這是譜定理（spectral theorem）的二維情況：每個實對稱矩陣都可以用旋轉對角化（diagonalise），而對角線上的元素就是它的特徵值（eigenvalues）。二次型的特徵值可用來為圓錐曲線（conics）和二次曲面（quadric surfaces）分類；同一個想法在力學中給出慣量主軸（principal axes of inertia），在統計學中給出主成分（principal components）。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）對對稱矩陣和二次型的講解十分易讀。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。