詳細解答

STEP III 1997，第 7 題

純數學 • e 的無理性

> **STEP III 1997，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q7

關鍵思路

級數（series）a_n 正好就是 $n!\,\mathrm{e}$ 去掉整數部分（integer part）之後餘下的東西：把級數 $\mathrm{e} = \sum 1/k!$ 乘以 $n!$，直至 $k = n$ 為止的每一項都變成整數，而尾段則變成 a_n。等比級數（geometric series）b_n 的作用，是逐項為 a_n 提供一個容易處理的上界（upper bound）。一旦知道尾段嚴格介乎 0 與 1 之間，假如 e 是有理數（rational number），就會有某個 $n!\,\mathrm{e}$ 既是整數，小數部分（fractional part）卻又不等於零，這是荒謬的。

解答

第 (i) 部分

級數 b_n 是等比級數，首項為 $\frac{1}{n+1}$，公比（common ratio）為 $r = \frac{1}{n+1}$。由於 $n \geq 1$，我們有 $0 < r \leq \frac{1}{2} < 1$，所以它收斂（converges），而且

$$b_n = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

第 (ii) 部分

把兩個級數的第 k 項分別寫成

$$u_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}, \qquad v_k = \frac{1}{(n+1)^k}.$$

u_k 的分母中有 k 個因子 $n+1, n+2, \ldots, n+k$，每一個都至少是 $n+1$，所以 $(n+1)(n+2)\cdots(n+k) \geq (n+1)^k$，因此

$$0 < u_k \leq v_k \quad \text{對所有} k \geq 1.$$

等號只在 $k = 1$ 時成立；當 $k \geq 2$ 時，因子 $n+2$ 嚴格大於 $n+1$，所以 $u_k < v_k$。

所有項都是正數，並且不超過收斂級數 b_n 的對應項，所以 a_n 收斂（根據比較判別法（comparison test））；而且 $a_n \geq u_1 > 0$。至於上界，

$$b_n - a_n = \sum_{k\geq 1}(v_k - u_k) \;\geq\; v_2 - u_2 = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0,$$

因為每一項 $v_k - u_k$ 都是非負的。於是 $a_n < b_n = \frac{1}{n}$，合起來便得

$$0 < a_n < \frac{1}{n},$$

這正是所要證明的。

> **想一想** 為甚麼單憑「a_n 的每一項都不超過 b_n 的對應項」，並不足以得出嚴格不等式（strict inequality）？

逐項的 $\leq$ 在取極限後只能給出 $a_n \leq b_n$；把無窮多項相加時，嚴格不等式有可能變成等式。正因如此，我們挑出 $k = 2$ 這一項，它的差距是一個確定的正數，再指出其餘各項的差距全都 ≥ 0。

第 (iii) 部分

利用級數 $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$，乘以 $n!$，並在 $k = n$ 處把和式拆開：

$$n!\,\mathrm{e} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{N} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!}.$$

當 $k \leq n$ 時，$\frac{n!}{k!} = (k+1)(k+2)\cdots n$ 是整數，所以 N 是正整數。當 $k = n+j$ 而 $j \geq 1$ 時，

$$\frac{n!}{(n+j)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+j)} = u_j,$$

所以尾段正好就是 a_n。因此

$$n!\,\mathrm{e} = N + a_n, \qquad N \in \mathbb{Z}, \quad 0 < a_n < \tfrac{1}{n} \leq 1,$$

這裏用到第 (ii) 部分及 $n \geq 1$。一個形如（整數）+（$[0,1)$ 內的某數）的數，其整數部分就是那個整數，所以 $[n!\,\mathrm{e}] = N$，因此

$$a_n = n!\,\mathrm{e} - [n!\,\mathrm{e}].$$

第 (iv) 部分

採用反證法（proof by contradiction），假設 $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$，其中 p, q 為正整數。取 $n = q$，則

$$n!\,\mathrm{e} = q! \cdot \frac{p}{q} = (q-1)!\,p$$

是整數，所以它等於自身的整數部分，而由第 (iii) 部分得 $a_q = 0$。但第 (ii) 部分指出 $a_q > 0$。這個矛盾說明 e 是無理數（irrational number）。

（任何 $n \geq q$ 同樣可行，因為 q 整除 $n!$；重點只在於必定有某個 $n!\,\mathrm{e}$ 是整數。）

驗算

當 $n = 1$ 時：$1!\,\mathrm{e} = 2.71828\ldots$，所以小數部分是 $0.71828\ldots$，而把 $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots$ 加起來同樣得到 $0.71828\ldots$，明顯小於 $b_1 = 1$。當 $n = 5$ 時，$a_5 \approx 0.19382$，僅僅略小於 $\frac{1}{5}$：隨着 n 增大，這個界相對而言愈來愈緊，因為 a_n 與 b_n 的首項相同。用電腦以精確分數驗算，可確認對 1 至 29 的每一個 n，都有 $0 < a_n < \frac{1}{n}$ 以及 $n!\,\mathrm{e} = N + a_n$，其中 $[n!\,\mathrm{e}] = N$。

常見錯誤

- 僅僅因為對所有 k 都有 $u_k \leq v_k$，就聲稱 $a_n < b_n$。你需要有一項是嚴格較小的（這裏是 $k = 2$），才能保住嚴格不等式。
- 忘記了 $\sum_{k \leq n} n!/k!$ 為何是整數：原因是當 $k \leq n$ 時，$k!$ 整除 $n!$。
- 在第 (iv) 部分只用 $0 < a_n$，或只用 $a_n < 1$。兩邊都不可或缺：$a_n < 1$（來自第 (ii) 部分）令我們能夠確定 a_n 就是小數部分，而 $a_n > 0$ 則帶來矛盾。

STEP 之外

這是傅立葉（Fourier）對 e 是無理數的證明，而它的模式（證明一個本應是整數的量嚴格介乎 0 與 1 之間）是許多無理性證明的藍本，包括 π 的無理性，以及 $r \neq 0$ 為有理數時 e^r 的無理性。在大學第一門分析（analysis）課程中，你會嚴格地論證比較判別法和 e 的級數，並且明白這個論證之所以行得通，全靠 $\sum 1/k!$ 收斂得夠快：分數逼近 e 的效果，遠遠好於逼近任何有理數時所能做到的。Abbott 的 *Understanding Analysis* 涵蓋級數方面的內容，而 Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 則是有理逼近（rational approximation）的一本出色入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。