詳細解答

STEP III 1997，第 6 題

純數學 • 切比雪夫微分方程

> **STEP III 1997，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q6

關鍵思路

因子 $1-x^2$ 與 $x=\cos\theta$ 並列，只暗示一件事：$1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$。只要用鏈式法則（chain rule）小心地換元，這條關於 x 的棘手方程，就會變成關於 θ 的簡諧運動（simple harmonic motion）方程。我們解出該方程，再用兩個附帶條件定出常數。至於遞推關係（recurrence），其實是喬裝了的複角恆等式（compound-angle identity）。全題中 n 為非負整數。條件 $y_n(x)=(-1)^n y_n(-x)$ 只有在這個情況下才有意義。

解答

變數代換

設 $x=\cos\theta$，其中 $0<\theta<\pi$，故 $\sin\theta>0$，且 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta=-\sin\theta\neq 0$。為簡化記號，我們把 y_n 寫成 y。由鏈式法則，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta}=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}.$$

要再對 x 求導一次，我們先對 θ 求導，再乘以 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x=-1/\sin\theta$：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)=\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)\\&=\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}.\end{aligned}$$

現在利用 $1-x^2=\sin^2\theta$ 和 $x=\cos\theta$ 代入：

$$\begin{aligned}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+n^2y &= \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}+n^2y\\ &= \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}+n^2y.\end{aligned}$$

兩個一階導數項剛好互相抵消。因此題目所給的方程等價於 $\dfrac{\mathrm{d}^2y_n}{\mathrm{d}\theta^2}+n^2y_n=0$，正是所求。

想一想 為甚麼 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 不就是 $\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}$？

因為 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 是一個乘積：$-1/\sin\theta$ 乘以 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$。兩個因子都取決於 θ，所以用積法則（product rule）會得出兩項。多出來的那一項，恰好抵消了 $-x\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 一項，這正是題目中有這一項的原因。

求解 y_n

當 $n\geq 1$ 時，$y''+n^2y=0$ 的通解（general solution）為

$$y_n=A\cos n\theta+B\sin n\theta.$$

當 $n=0$ 時，方程是 $y''=0$，故 $y_0=A+B\theta$。

在 $x=1$ 的條件。$x=1$ 對應 $\theta=0$，而由 $y_n(1)=1$ 可知兩種情況下都有 $A=1$。

*對稱條件。*把 x 換成 $-x$，即是把 θ 換成 $\pi-\theta$，因為 $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$，而且 $\pi-\theta$ 仍然在 $[0,\pi]$ 之內。對於整數 $n\geq 1$，

$$\cos n(\pi-\theta)=(-1)^n\cos n\theta,\qquad \sin n(\pi-\theta)=-(-1)^n\sin n\theta.$$

所以 $(-1)^n y_n(-x)=(-1)^n[A(-1)^n\cos n\theta-B(-1)^n\sin n\theta]=A\cos n\theta-B\sin n\theta$。令此式對所有 θ 都等於 $y_n(x)=A\cos n\theta+B\sin n\theta$，得 $2B\sin n\theta=0$，故 $B=0$。當 $n=0$ 時，條件變成對所有 θ 都有 $1+B\theta=1+B(\pi-\theta)$，同樣必須有 $B=0$。

因此，對每個非負整數 n，

$$\boxed{y_n=\cos n\theta},\qquad \text{即}\quad y_n(x)=\cos(n\arccos x)\quad(|x|\leq 1).$$

關係式 $\theta=\arccos x$ 把 $[-1,1]$ 映滿 $[0,\pi]$，所以結果對 $|x|\leq 1$ 成立。端點 $x=\pm 1$（$\theta=0,\pi$）則由連續性（continuity）補上。

推論

取 $n=0$ 和 $n=1$：$y_0=\cos 0=1$，$y_1=\cos\theta=x$。

至於遞推關係，把以下兩條複角公式相加：

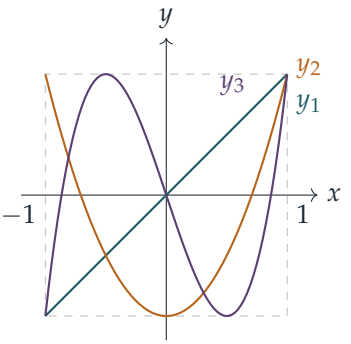
$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta, \qquad \cos(n-1)\theta = \cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta\sin\theta.$$

正弦項互相抵消，餘下 $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$。以 x 表示，即

$$y_{n+1} - 2xy_n + y_{n-1} = 0 \qquad (n \geq 1,\ |x| \leq 1),$$

這就是所要求的結果。

由 $y_0 = 1$ 和 $y_1 = x$ 出發，遞推關係會產生一個個多項式（polynomial）：$y_2 = 2x^2 - 1$、$y_3 = 4x^3 - 3x$、$y_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$，如此類推。



每個 y_n 在 $[-1, 1]$ 上都介乎 -1 與 1 之間；它既然是餘弦，這是必然的。

驗算

- $y_2 = 2x^2 - 1$：此時 $(1-x^2)\cdot 4 - x\cdot 4x + 4(2x^2-1) = 0$。它滿足 $n = 2$ 時的方程，而且 $y_2(1) = 1$，並且是偶函數（even function）。
- y_n 的奇偶性（parity）與 $(-1)^n$ 吻合。例如 $y_3 = 4x^3 - 3x$ 是奇函數（odd function）。
- 數值上，取 $x = 0.3$：$\cos(2\arccos 0.3) = -0.82 = 2(0.3)^2 - 1$。再以有限差分（finite difference）檢驗 $y_n = \cos(n\arccos x)$（$0 \leq n \leq 8$）是否滿足原方程，所得殘差（residual）均小於 10^{-5}。

常見錯誤

- 求二階導數時忘記用積法則，以致一階導數項無法抵消。
- 保留了 $\sin n\theta$ 這個解。它滿足微分方程（differential equation）和 $y_n(1) = 1$（因為 $\sin 0 = 0$），但不符合對稱條件。題目設下這個條件，正是為了把它剔除。
- 忘記 $n = 0$ 要另外處理：這時通解是 $A + B\theta$，而不是一對餘弦和正弦。

STEP 之外

多項式 y_n 就是*切比雪夫多項式*（Chebyshev polynomials）$T_n(x)$。題目所給的方程就是切比雪夫方程。我們捨棄的第二個解 $\sin(n \arccos x)$，是 $\sqrt{1-x^2}$ 乘以一個多項式。切比雪夫多項式在逼近理論（approximation theory）中佔有核心地位。在所有 n 次首一多項式（monic polynomial）之中，$2^{1-n}T_n$ 在 $[-1,1]$ 上的最大絕對值最小，因此對許多數值方法而言，T_n 的零點是最佳的插值（interpolation）節點。至於這類方程的級數解（series solution），以及由此衍生的特殊函數（special functions），可參閱 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。