詳細解答

STEP III 1997，第 5 題

純數學 • 擺線的弧長

> **STEP III 1997，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q5

關鍵思路

滾動車輪邊緣上的一點，所描出的軌跡是一條擺線（cycloid）。只要把該點的位置用車輪轉過的角度表示出來，這道題就只是一個弧長（arc length）積分。滾動條件（不打滑）把輪心的運動與轉角連繫起來，而半角恆等式（half-angle identity）則令弧長公式中的平方根一下子化簡。

解答

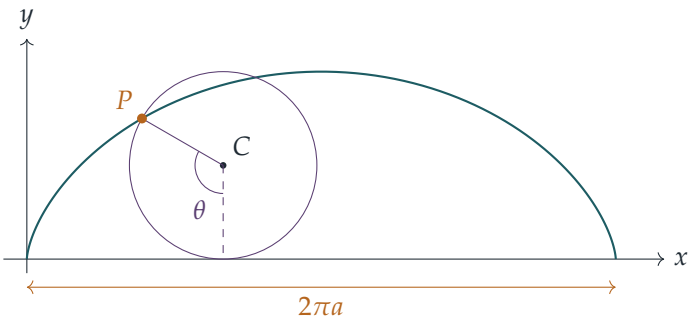
建立路徑

設車輪半徑為 a，沿 x 軸作無滑動的滾動。開始時，標記的點 P 在原點與地面接觸，並設 θ 為車輪轉過的角度（以弧度計）。

由於沒有打滑，車輪走過的地面長度等於與地面接觸過的輪緣長度，所以輪心 C 移動了距離 $a\theta$，位於 $(a\theta,\, a)$。相對於 C 而言，點 P 起初在它的正下方，其後轉過了角度 θ（車輪向右滾動，故為順時針方向），所以 P 位於 $C + (-a\sin\theta,\, -a\cos\theta)$。因此，車輪轉動一周時，

$$x = a(\theta - \sin\theta), \qquad y = a(1 - \cos\theta), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

在這段時間內，車輪向前移動了距離 $2\pi a$。



弧長

求導數，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = a(1-\cos\theta), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = a\sin\theta,$$

所以

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 &= a^2\left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\\ &= 2a^2(1-\cos\theta)\\ &= 4a^2\sin^2\tfrac{\theta}{2},\end{aligned}$$

其中用到 $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$。

? **想一想** 取平方根時，結果是 $2a\sin\frac{\theta}{2}$ 還是 $2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$？在這裏有沒有分別？

平方根永遠是 $2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$。當 $0 \le \theta \le 2\pi$ 時，我們有 $0 \le \frac{\theta}{2} \le \pi$，在這範圍內 $\sin\frac{\theta}{2} \ge 0$，所以恰好轉動一周時，絕對值（modulus）符號可以省去。（若範圍更長，就必須把積分分段計算。）

因此，P 所走的距離為

$$s = \int_0^{2\pi} 2a\sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \Big[-4a\cos\tfrac{\theta}{2}\Big]_0^{2\pi} = -4a(-1) + 4a = 8a.$$

比值

車輪移動了 $2\pi a$，而輪緣上的點則走了 $8a$，所以所求的比值為

$$\frac{2\pi a}{8a} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785.$$

這個比值與車輪的大小無關，而這亦是理所當然的：把車輪放大或縮小，兩段距離都會按相同的倍數改變。

驗算

- 該點所走的距離比車輪的長（$8a > 2\pi a \approx 6.28a$），這是合理的：它既向前移動，同時又上升和下降各 $2a$。事實上，$8a$ 恰好是四條直徑的長度。
- 一個粗略的估計：路徑由 $(0,0)$ 上升至 $(\pi a, 2a)$，再下降至 $(2\pi a, 0)$，所以它的長度至少是 $2\sqrt{\pi^2 a^2 + 4a^2} \approx 7.45a$，而至多是 $2\pi a + 4a \approx 10.28a$。數值 $8a$ 正好落在兩者之間。
- 以數值方法驗證：在車輪滾動的過程中，追蹤輪緣上的點的 200 000 個位置，再把各段直線距離相加，當 $a = 1$ 時得出 7.99999999992，所以比值是 $0.78539816\ldots = \pi/4$。

常見錯誤

- 把參數式（parametrisation）中的正負號弄錯（例如 $x = a(\theta + \sin\theta)$），這樣得出的路徑相對於車輪是向後移動的。可在 $\theta = \pi$ 處檢查：P 應位於最高點 $(\pi a, 2a)$。
- 把被積函數（integrand）保留為 $a\sqrt{2 - 2\cos\theta}$，並試圖直接積分；半角恆等式正是令積分變得容易的一步。
- 把比值上下顛倒：題目要求的是車輪所走的距離除以該點所走的距離，即 $\pi/4$，而不是 $4/\pi$。

STEP 之外

擺線是數學中最著名的曲線之一。它是最速降線（brachistochrone），即在重力作用下，兩點之間下降得最快的曲線；它也是等時降線（tautochrone），即珠子無論從曲線上哪一點出發，都會在相同時間內到達最低點。這兩項事實都要用變分法（calculus of variations）來證明，你會在大學一年級或二年級的力學或數學方法課程中學到；而本題的弧長計算，正是兩者的第一步。如想嘗試更多同類的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。