詳細解答

# STEP III 1997，第 4 題

純數學 • 算術幾何平均不等式

> **STEP III 1997，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q4

## 關鍵思路

題目原文有一處印刷錯誤：有四個根的多項式（polynomial）必定是四次多項式，而係數的規律 $1,4,6,4,1$ 告訴我們，題目原意的多項式是

$$\mathrm{f}(x) = x^4 - 4ax^3 + 6b^2x^2 - 4c^3x + d^4.$$

這樣選取係數，是為了令 $a, b^2, c^3, d^4$ 各自都是一個*平均值*：分別是各根的平均值、兩兩乘積的平均值、三三乘積的平均值，以及四個根全部相乘之積的平均值。之後每一個不等式，都是把算術平均－幾何平均不等式（AM–GM inequality）應用於 f、f′ 或 f″ 的根而得出，而羅爾定理（Rolle's theorem）則確保這些根仍然是相異的正數。

## 解答

設 $\mathrm{f}(x) = (x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$。比較係數，得

$$p+q+r+s = 4a, \qquad pq+pr+ps+qr+qs+rs = 6b^2,$$
$$pqr+qrs+rsp+spq = 4c^3, \qquad pqrs = d^4.$$

### 第 (i) 部分

設 $P = pqrs = d^4$。由於沒有一個根是零，

$$pqr = \frac{P}{s}, \quad qrs = \frac{P}{p}, \quad rsp = \frac{P}{q}, \quad spq = \frac{P}{r}.$$

映射 $t \mapsto P/t$ 在正實數上是一對一（one-to-one）的，而 $p, q, r, s$ 互不相同，所以這四個乘積亦互不相同。

### 第 (ii) 部分

四個三三乘積是互不相同的正數，所以根據 AM–GM 不等式，

$$c^3 = \frac{pqr + qrs + rsp + spq}{4} > (pqr \cdot qrs \cdot rsp \cdot spq)^{1/4} = ((pqrs)^3)^{1/4} = (d^4)^{3/4} = d^3.$$

每個根都恰好出現在四個乘積的其中三個之中，因此它們的積是 $(pqrs)^3$。由於 $c, d > 0$，而 $t \mapsto t^3$ 是遞增的，故由 $c^3 > d^3$ 可得 $c > d$。

### 第 (iii) 部分

把各根排序，使得 $0 < p < q < r < s$。多項式 f 可微（differentiable），並且在 $p$ 和 $q$ 處取值為零，所以根據羅爾定理，f′ 有一個根 $\alpha$ 滿足 $p < \alpha < q$。同理，還有根 $\beta \in (q, r)$ 和 $\gamma \in (r, s)$。這些開區間（open interval）互不重疊，所以 $\alpha < \beta < \gamma$ 互不相同。由於 f′ 是三次多項式，它再沒有其他根。還要留意，這三個根全是正數，因為 $\alpha > p > 0$。

### 第 (iv) 部分

求導，得

$$\mathrm{f}'(x) = 4x^3 - 12ax^2 + 12b^2x - 4c^3 = 4(x^3 - 3ax^2 + 3b^2x - c^3),$$

所以 $\alpha, \beta, \gamma$ 是 $x^3 - 3ax^2 + 3b^2x - c^3$ 的根，並且

$$\alpha + \beta + \gamma = 3a, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3b^2, \qquad \alpha\beta\gamma = c^3.$$

這是次數降低了一次的同一種規律，所以我們照搬第 (i) 和第 (ii) 部分的做法。兩兩乘積是 $\alpha\beta = c^3/\gamma$、$\beta\gamma = c^3/\alpha$、$\gamma\alpha = c^3/\beta$，由於 $\alpha, \beta, \gamma$ 是互不相同的正數，這些乘積亦互不相同。根據 AM–GM 不等式，

$$b^2 = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{3} > ((\alpha\beta\gamma)^2)^{1/3} = c^2,$$

又因為 $b, c > 0$，所以 $b > c$。

**想一想** 為甚麼要先完成第 (iii) 部分，才可以對 f′ 使用 AM–GM？

AM–GM 不等式只適用於正實數，而且我們需要的是嚴格不等的版本。一個三次多項式根本不一定有三個實根。正是羅爾定理保證了 $\alpha, \beta, \gamma$ 是互不相同的正實數，因而兩兩乘積也是如此。

### 第 (v) 部分

把同樣的論證再用一次。由於 f′ 有相異的根 $\alpha < \beta < \gamma$，根據羅爾定理，

$$\mathrm{f}''(x) = 12x^2 - 24ax + 12b^2 = 12(x^2 - 2ax + b^2),$$

有根 $\mu \in (\alpha, \beta)$ 和 $\nu \in (\beta, \gamma)$，而且這兩個根是相異的正數。於是 $\mu + \nu = 2a$ 及 $\mu\nu = b^2$，再根據兩個數的 AM–GM 不等式，

$$a = \frac{\mu + \nu}{2} > \sqrt{\mu\nu} = b.$$

（換一個說法：$x^2 - 2ax + b^2$ 有兩個相異實根，所以它的判別式（discriminant）$4a^2 - 4b^2$ 是正數，而兩者皆為正數，故 $a > b$。）綜合以上各部分，我們證明了

$$a > b > c > d.$$

## 驗算

- 取根為 $1, 2, 3, 4$：這時 $4a = 10$，$6b^2 = 35$，$4c^3 = 50$，$d^4 = 24$，所以 $a = 2.5$，$b \approx 2.415$，$c \approx 2.321$，$d \approx 2.213$，次序正確。
- 假如四個根全都等於 $k$，則 $\mathrm{f}(x) = (x - k)^4$ 而 $a = b = c = d = k$。這就是為甚麼要有「根互不相同」這個條件，才能得到嚴格不等式。
- 我們隨機測試了 20 000 組由四個相異正根組成的數據，當中包括幾乎重合的根，每一次 $a > b > c > d$ 都成立。

## 常見錯誤

- 直接對 f 的根使用 AM–GM。這樣可得 $a > d$，卻無法分開中間的兩項。
- 忘記檢查代入 AM–GM 的數是否互不相同的正數，而這正是第 (i) 和第 (iii) 部分的用意所在。
- 由 $c^3 > d^3$ 或 $b^2 > c^2$ 推出 $c > d$ 或 $b > c$ 時，沒有指出所有字母都代表正數。

## STEP 之外

$a, b, c, d$ 這些量是各根的對稱平均（symmetric means），而不等式鏈 $a > b > c > d$ 是麥克勞林不等式（Maclaurin's inequality）的一個特殊情況：對於正實數，$k$ 重乘積的平均值的 $k$ 次方根，隨 $k$ 增加而遞減。藉求導來降低次數、同時保持各平均值不變，這個技巧也是通往牛頓（Newton）不等式的標準途徑。想了解更多，可參閱 Steele 的 *The Cauchy–Schwarz Master Class*（一本以柯西－施瓦茨不等式為主線的不等式專著），或哈代（Hardy）、李特爾伍德（Littlewood）與波利亞（Pólya）合著的經典 *Inequalities*（《不等式》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。