詳細解答

STEP III 1997，第 3 題

純數學 • 單位根

> **STEP III 1997，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q3

關鍵思路

n 次單位根（roots of unity）$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ 正好是 $z^n - 1$ 的全部根，所以這個多項式（polynomial）可以完全因式分解（factorise）；除去因式 $z - 1$ 便得到第一個恆等式（identity）。把多邊形放在複平面（complex plane）上，以 O 為原點，各頂點就是 $re^{i\theta}$ 乘以各個單位根。這樣，向量和就是一個等比級數（geometric series），而弦長的平方則可用點積（dot product）展開 $|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1|^2$ 而得。

解答

乘積恆等式

對 $k = 0, 1, \ldots, n-1$，我們有 $(\omega^k)^n = e^{2\pi i k} = 1$，所以每個 ω^k 都是 $z^n - 1 = 0$ 的根。這 n 個數互不相同，因為它們的輻角（argument）$2\pi k/n$ 互不相同，而且全部位於 $[0, 2\pi)$ 之內。一個 n 次多項式，若首項係數（leading coefficient）為 1 並有 n 個相異的根，就等於相應的一次因式之積，所以

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}).$$

另一方面，由等比級數求和（或者直接乘開），

$$z^n - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}).$$

對每個 $z \neq 1$，我們可以把兩個式子同除以 $z - 1$，得出

$$(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} \qquad (z \neq 1).$$

想一想 題目說的是「任意複數 z」。那麼 $z = 1$ 又如何？這時我們不能做除法。

兩邊都是 $n-1$ 次多項式，而它們在無窮多個點 $z \neq 1$ 上相等。於是兩者之差是一個有無窮多個根的多項式，所以它是零多項式（zero polynomial）。（另一個做法：兩邊都是 z 的連續（continuous）函數，所以令 $z \to 1$ 即可。）因此，恆等式對每個複數 z 都成立，包括 $z = 1$，這正是所要證明的。

向量和

把圓所在的平面視為複平面，以 O 為原點，並以 a_k 表示代表 A_k 的複數。若 $a_1 = re^{i\theta}$，則把各頂點按逆時針方向依次標記（相鄰兩個頂點在 O 所對的角為 $2\pi/n$），便有

$$a_k = re^{i\theta}\,\omega^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

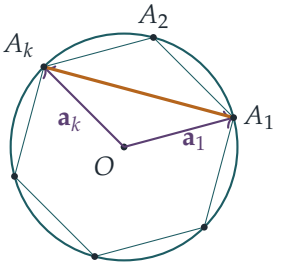
（若改為按順時針方向標記，只不過是把 ω 換成 $\bar{\omega} = \omega^{n-1}$，而它所遍歷的仍是同一組單位根；況且這個和本來就與頂點的次序無關。）

向量 $\overrightarrow{OA_k}$ 對應複數 a_k，而向量相加對應複數相加。所以我們要求的是

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = re^{i\theta}\left(1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1}\right).$$

括號內的式子就是恆等式右邊在 $z = \omega$ 時的值。由於 ω 出現在左邊的因式之中（當 $n \geq 2$ 時），左邊含有因式 $\omega - \omega = 0$，所以括號內的值為 0。（同樣地，它是一個公比（common ratio）為 $\omega \neq 1$ 的等比級數，所以等於 $(\omega^n - 1)/(\omega - 1) = 0$。）因此

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \mathbf{0}.$$



距離平方之和

現在把 $\mathbf{a}_k = \overrightarrow{OA_k}$ 寫成向量，於是對每個 k 都有 $|\mathbf{a}_k| = r$，並且 $\overrightarrow{A_1A_k} = \mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1$。用點積展開，

$$\begin{aligned} |A_1A_k|^2 &= (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1)\cdot(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1) \\ &= |\mathbf{a}_k|^2 + |\mathbf{a}_1|^2 - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_k \\ &= 2r^2 - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_k. \end{aligned}$$

這對 $k = 1$ 也成立，此時兩邊都是 0。對 $k = 1, \ldots, n$ 求和，並利用點積對加法的分配律，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |A_1A_k|^2 &= 2r^2 n - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{a}_k\right) \\ &= 2r^2 n - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{0} = 2r^2 n, \end{aligned}$$

這裏用了上一部分的結果。這就是所要證明的結果。

驗算

- $n = 2$：恆等式變成 $z - (-1) = 1 + z$。兩點是一條直徑的兩端，所以和為 $0 + (2r)^2 = 4r^2 = 2r^2\cdot 2$。
- $n = 4$，$r = 1$：由正方形的一個角出發，各距離的平方為 $0, 2, 4, 2$，總和為 $8 = 2\cdot 1^2\cdot 4$。
- 數值上，隨機選取 2000 組 $n \le 20$、半徑和旋轉角度，向量和均為零，弦長平方之和與 $2r^2n$ 的誤差在 10^{-14} 以內；乘積恆等式也在隨機的 z（以及 $z = 1$）上驗證過，準確度相同。

常見錯誤

- 除以 $z - 1$ 之後，忘記了這樣只證明了恆等式在 $z \neq 1$ 時成立。
- 寫成 $|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1|^2 = |\mathbf{a}_k|^2 - |\mathbf{a}_1|^2$：交叉項 $-2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_k$ 正是整個論證的關鍵。

STEP 之外

在乘積恆等式中代入 $z = 1$ 並取模（modulus），可得 $|1-\omega|\,|1-\omega^2|\cdots|1-\omega^{n-1}| = n$：單位圓的內接正 n 邊形中，由一個頂點出發的各條弦長之積恰好是 n，與本題的平方和

相映成趣。把 $z^n - 1$ 按單位根因式分解，是分圓多項式（cyclotomic polynomials）和離散傅立葉變換（discrete Fourier transform）的起點，兩者都會在大學課程的早期遇到。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以圖像方式講解複分析）是一本優美的書，很適合用來見識這類以複數處理的幾何。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。