詳細解答

# STEP III 1997，第 2 題

純數學 • 曲線描繪

> **STEP III 1997，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q2

## 關鍵思路

取對數（logarithm）後，$x^y = y^x$ 變成 $y\ln x = x\ln y$，再除以 $xy$ 便得 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(y)$。所以題目的後半其實是在問前半的事：只要知道 f 的每個輸出值對應多少個輸入值，就知道每個 $x$ 有多少個「拍檔」$y$。這條方程總有一個明顯的解 $y = x$；有趣的是另外那一個。

## 解答

### f 的圖像

用商法則（quotient rule）求導，

$$\mathrm{f}'(t) = \frac{t\cdot\frac{1}{t} - \ln t}{t^2} = \frac{1-\ln t}{t^2}, \qquad \mathrm{f}''(t) = \frac{2\ln t - 3}{t^3}.$$

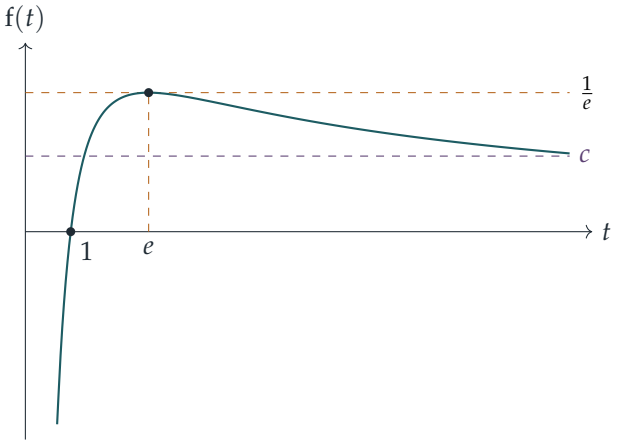
所以當 $0 < t < e$ 時 $\mathrm{f}'(t) > 0$，當 $t > e$ 時 $\mathrm{f}'(t) < 0$：f 在 $(0, e]$ 上嚴格遞增（strictly increasing），在 $[e, \infty)$ 上嚴格遞減（strictly decreasing）。極大值為

$$\mathrm{f}(e) = \frac{1}{e}.$$

草圖還需要的其他特徵：

- 當 $0 < t < 1$ 時 $\mathrm{f}(t) < 0$，$\mathrm{f}(1) = 0$，而當 $t > 1$ 時 $\mathrm{f}(t) > 0$。
- 當 $t \to 0^+$ 時，$\ln t \to -\infty$ 而 $1/t \to +\infty$，所以 $\mathrm{f}(t) \to -\infty$：$y$-軸是一條漸近線（asymptote）。
- 當 $t \to \infty$ 時，$\mathrm{f}(t) \to 0^+$，因為 $\ln t$ 的增長比 $t$ 慢。所以 $t$-軸是一條漸近線。

- 在 $t = e^{3/2}$ 處有一個拐點（point of inflection），該處 $\mathrm{f} = \frac{3}{2}e^{-3/2} \approx 0.33$。點算解的數目時用不着它，但有了它，草圖才算如實。




**有多少個 $t$ 給出數值 $c$？**

由於 f 在 $(0, e]$ 和 $[e, \infty)$ 上各自連續（continuous）且嚴格單調（strictly monotonic），每一段對它取得到的任何值都恰好取一次。在 $(0, e]$ 上，f 由 $-\infty$ 遞增至 $\frac{1}{e}$；在 $[e, \infty)$ 上，它由 $\frac{1}{e}$ 向 0 遞減，但永遠不會達到這個值。因此，對給定的數值 $c$：

- $c > \frac{1}{e}$：**沒有** $t$ 值；
- $c = \frac{1}{e}$：**一個**值，$t = e$；
- $0 < c < \frac{1}{e}$：**兩個**值，一個在 $(1, e)$ 內，一個在 $(e, \infty)$ 內（即草圖中的水平線 $c$）；
- $c \leq 0$：**一個**值，在 $(0, 1]$ 內，因為遞減的那一支始終嚴格為正。

**點算 $x^y = y^x$ 的解**

對 $x, y > 0$，兩邊皆為正數，所以可以取對數；ln 是一對一（one-to-one）的，所以既不會多出解，也不會遺漏解：

$$x^y = y^x \iff y \ln x = x \ln y \iff \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y} \iff \mathrm{f}(y) = \mathrm{f}(x),$$

其中我們除以了 $xy > 0$。所以，對固定的 $x$，正數 $y$ 的數目就是滿足 $\mathrm{f}(t) = c$ 的 $t$ 的數目，其中 $c = \mathrm{f}(x)$。其中一個必定是 $y = x$。

? **想一想** $c = \mathrm{f}(x)$ 實際上可以落入上述四種情況中的哪幾種？

由於 $c$ 是 f 的一個值，$c > \frac{1}{e}$ 這種情況不可能出現。把其餘情況轉換回關於 $x$ 的條件：

- $0 < x \leq 1$：這時 $c = \mathrm{f}(x) \leq 0$，所以恰好有**一個** $y$，就是 $y = x$。
- $x = e$：這時 $c = \frac{1}{e}$，所以恰好有**一個** $y$，就是 $y = e$。
- $1 < x < e$ 或 $x > e$：這時 $0 < c < \frac{1}{e}$，所以恰好有**兩個** $y$ 值：$y = x$ 和另外一個。若 $1 < x < e$，另外那個位於 $(e, \infty)$ 內；若 $x > e$，它位於 $(1, e)$ 內。

例如，$x = 2$ 的拍檔是 $y = 4$，因為 $2^4 = 4^2 = 16$。

### 描繪解集

解集由直線 $y = x$（對所有 $x > 0$）和第二條曲線組成；第二條曲線由那些「另外的」解構成，完全位於 $x > 1, y > 1$ 的區域內。它的形狀如下：

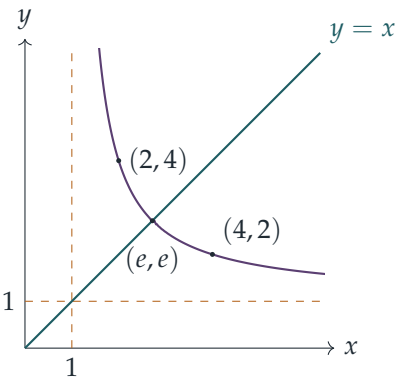
- 對稱性。把 $x$ 和 $y$ 對調，方程不變，所以曲線關於直線 $y = x$ 對稱。
- 遞減。當 $x$ 在 $(1, e)$ 內增大時，$\mathrm{f}(x)$ 增大，所以拍檔 $y > e$ 必須移向 f 較大之處，即 $y$ 減小。$x > e$ 時同理。所以在這一支上，$y$ 是 $x$ 的遞減函數。
- 漸近線。當 $x \to 1^+$ 時，$\mathrm{f}(x) \to 0^+$，所以拍檔 $y \to \infty$：直線 $x = 1$ 是一條漸近線。由對稱性，當 $x \to \infty$ 時，$y \to 1^+$，故 $y = 1$ 也是一條漸近線。
- 與直線 $y = x$ 相交。當 $x \to e$ 時，拍檔也趨向 $e$，所以曲線經過 $(e, e)$，並在該處穿過直線。在 $t = e$ 附近，利用 $\mathrm{f}'(e) = 0$ 和 $\mathrm{f}''(e) = -e^{-3}$，由泰勒定理（Taylor's theorem）得 $\mathrm{f}(t) \approx \frac{1}{e} - \frac{(t-e)^2}{2e^3}$。所以 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(y)$ 迫使 $(y-e)^2 \approx (x-e)^2$，即 $y - e \approx \pm(x-e)$。取正號就是直線 $y = x$。取負號就是我們的曲線，因此它與直線成直角相交，斜率（gradient）為 $-1$。

**想一想** 我們能否把這條曲線明確地寫出來？

可以，只要用兩者之比作參數化（parametrise）。設 $y = tx$，其中 $t > 0, t \neq 1$。那麼 $x^{tx} = (tx)^x$；兩邊開 $x$ 次方得 $x^t = tx$，所以 $x^{t-1} = t$，於是

$$x = t^{1/(t-1)}, \qquad y = t^{t/(t-1)}.$$

在 $t = 2$ 時得到 $(2, 4)$，在 $t = \frac{1}{2}$ 時得到 $(4, 2)$。當 $t \to 1$ 時，兩個坐標都趨向 $e$，因為 $t^{1/(t-1)} \to e$。下圖的曲線就是這樣畫出來的。




## 驗算

- $2^4 = 4^2$ 是著名的整數例子，它確實落在曲線上，並如所料分別位於 $1 < x < e$ 和 $x > e$ 之內。
- 數值上，用細密的網格搜尋，得出 f 的極大值位於 $t \approx 2.718$，其值為 $0.367879 \approx 1/e$。用二分法（bisection）求得 $x = 1.01$ 的拍檔為 $y \approx 659$，而 $x = 100$ 的拍檔為 $y \approx 1.050$。這些結果與漸近線 $x = 1$ 和 $y = 1$ 吻合。
- 在 $x = e$ 處用中心差分（central difference），得出第二支的斜率為 $-1.0000$。

## 常見錯誤

- 說每個 $x \neq e$ 都有兩個拍檔。對 $0 < x \leq 1$，$\mathrm{f}(x)$ 的值並非正數，只有 $y = x$ 成立。
- 在最後的草圖中漏畫直線 $y = x$，或者把另一支畫成在 $(e, e)$ 處與直線相切，而不是穿過直線。
- 除以 $\ln x$ 或 $\ln y$（它們可能為零），而不是除以 $xy$。

## STEP 之外

第二條曲線是 $\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(y)$ 的一個水平集（level set），而 $(e, e)$ 正是該函數的梯度為零的一點。這就是為何在該處有兩支曲線相交，而不是只有一條光滑曲線經過。大學一年級分析課程中會遇到的隱函數定理（implicit function theorem），解釋了水平集何時在局部上是一個圖像，以及不是的時候會發生甚麼事。Abbott 的 *Understanding Analysis* 是打好基礎的入門好書。方程 $x^y = y^x$ 本身歷史悠久；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 中還有更多同類風格的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。