詳細解答

STEP III 1997，第 14 題

概率與統計 • 隨機變量的乘積

> **STEP III 1997，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q14

關鍵思路

周界是長度與闊度的線性函數，因此它的平均值和方差可直接由獨立變量之和的法則得出。面積則是一個乘積，而對於獨立變量，乘積的期望值等於期望值的乘積；把這一點應用於 LB 和 L^2B^2，便得到平均值和方差。要證明兩者並非獨立，最乾淨利落的做法是找出一個非零的協方差（covariance），因為獨立變量的協方差必定為零。

解答

設 L 和 B 分別為隨機抽出的一塊板的長度和闊度，則 L 與 B 獨立（independent），且

$$\mathrm{E}(L) = \mu_1, \quad \mathrm{Var}(L) = \sigma_1^2, \qquad \mathrm{E}(B) = \mu_2, \quad \mathrm{Var}(B) = \sigma_2^2.$$

設 $P = 2(L + B)$ 為周界，$A = LB$ 為面積。我們會多次用到 $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + [\mathrm{E}(X)]^2$，從而有 $\mathrm{E}(L^2) = \mu_1^2 + \sigma_1^2$ 及 $\mathrm{E}(B^2) = \mu_2^2 + \sigma_2^2$。

周界

由期望值的線性性質（linearity of expectation），

$$\mathrm{E}(P) = 2(\mu_1 + \mu_2).$$

由於 L 與 B 獨立，兩者之和的方差（variance）等於各自方差之和，所以

$$\mathrm{Var}(P) = 2^2(\mathrm{Var}(L) + \mathrm{Var}(B)) = 4(\sigma_1^2 + \sigma_2^2), \qquad \text{標準差}(P) = 2\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

面積

因為 L 與 B 獨立，$\mathrm{E}(LB) = \mathrm{E}(L)\,\mathrm{E}(B)$，所以

$$\mathrm{E}(A) = \mu_1\mu_2.$$

要求方差，我們需要 $\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(L^2B^2)$。

> **想一想** 我們還可以把 $\mathrm{E}(L^2B^2)$ 拆成乘積嗎？

可以：獨立變量的函數仍然互相獨立，所以 L^2 與 B^2 獨立，而 $\mathrm{E}(L^2B^2) = \mathrm{E}(L^2)\,\mathrm{E}(B^2)$。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(A) &= \mathrm{E}(L^2)\,\mathrm{E}(B^2) - \mu_1^2\mu_2^2\\ &= (\mu_1^2+\sigma_1^2)(\mu_2^2+\sigma_2^2) - \mu_1^2\mu_2^2\\ &= \sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2,\end{aligned}$$

以及

$$\text{標準差}(A) = \sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2}.$$

留意乘積的方差並非只是 $\sigma_1^2\sigma_2^2$：每一個維度上的離散程度，都會被另一個維度的典型大小放大。

周界與面積並非獨立

假如 P 與 A 獨立，便會有 $\mathrm{E}(PA) = \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)$，即 $\mathrm{Cov}(P, A) = 0$。我們來計算協方差。首先，

$$\mathrm{E}(PA) = 2\,\mathrm{E}(L^2B) + 2\,\mathrm{E}(LB^2).$$

再次利用獨立性（這次是 L^2 與 B 獨立，以及 L 與 B^2 獨立），

$$\mathrm{E}(L^2B) = (\mu_1^2+\sigma_1^2)\mu_2, \qquad \mathrm{E}(LB^2) = \mu_1(\mu_2^2+\sigma_2^2).$$

故此

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(P, A) &= \mathrm{E}(PA) - \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)\\ &= 2[(\mu_1^2+\sigma_1^2)\mu_2 + \mu_1(\mu_2^2+\sigma_2^2)] - 2(\mu_1+\mu_2)\mu_1\mu_2\\ &= 2(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2).\end{aligned}$$

長度和闊度都是正數，所以 $\mu_1 > 0$ 及 $\mu_2 > 0$；題目已知標準差（standard deviation）不為零，所以 $\sigma_1^2 > 0$ 及 $\sigma_2^2 > 0$。於是 $\mathrm{Cov}(P, A) > 0$。

由於獨立變量的協方差為零，P 與 A 不可能獨立。這是合理的：一塊板若在任何一個方向上比平均大，它的周界和面積往往都會較大。

想一想 假如算出來的協方差是零，這能否說明 P 與 A 獨立？

不能。這個推論只是單向的：獨立必然導致協方差為零，但協方差為零並不保證獨立。所以非零的協方差能證明兩者相依，這正是我們現在的情況；若協方差為零，則甚麼結論也得不到。

驗算

- 取 L 與 B 獨立，各自以概率 $\frac{1}{2}$ 取值 1 或 3。則 $\mu_i = 2$，$\sigma_i^2 = 1$，而公式給出 $\mathrm{Cov}(P, A) = 2(2+2) = 8$，與直接列舉四塊等可能的板所得的結果一致。兩者相依亦可直接看出：$\mathrm{P}(P=4) = \mathrm{P}(A=1) = \frac{1}{4}$，但 $\mathrm{P}(P=4 \text{ 且 } A=1) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{16}$，因為兩個事件都表示 $L = B = 1$。
- 以 $\mu_1 = 5$、$\mu_2 = 3$、$\sigma_1 = 0.7$、$\sigma_2 = 0.4$ 進行模擬，得到 標準差$(A) \approx 2.919$，而公式給出 2.913；又得到 $\mathrm{Cov}(P, A) \approx 4.56$，而公式給出 4.54。
- 若 $\sigma_2 \to 0$（闊度固定為 μ_2），則 標準差$(A) \to \mu_2\sigma_1$，這正是 $A = \mu_2 L$ 時應有的結果。

常見錯誤

- 寫成 $\mathrm{Var}(LB) = \sigma_1^2\sigma_2^2$，或寫成 $\mathrm{Var}(LB) = \mathrm{Var}(L)\mathrm{Var}(B) + \ldots$ 而漏掉了某些項；務必經由 $\mathrm{E}(L^2B^2)$ 來計算。
- 計算 $\mathrm{Var}(2(L+B))$ 時忘記把因子 2 平方。
- 以「因為兩者都取決於 L 和 B」為理由，斷言 P 與 A 相依。這只是直覺，不是證明；真正能下定論的，是協方差的計算（或一個概率不相等的具體例子）。

STEP 之外

不相關（uncorrelated）與獨立的隨機變量（random variable）之間的分別，是大學一年級概率課程的核心：獨立意味着聯合分佈（joint distribution）可以分解成乘積，這比單單一個矩（moment）的條件強得多。$\mathrm{Var}(LB)$ 的計算，也是實驗科學中廣泛使用的「誤差傳遞」（propagation of errors）公式的起點。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教科書）對獨立性、協方差及隨機變量的乘積有嚴謹細緻的討論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。