詳細解答

STEP III 1997，第 13 題

概率與統計 • 正態分佈的矩生成函數

> **STEP III 1997，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q13

關鍵思路

一切都建基於一個積分：標準正態分佈（standard normal distribution）的矩母函數（moment generating function，簡稱 mgf），只要把指數部分配方（completing the square）便可求得。之後，獨立性（independence）把和的矩母函數化為乘積，而矩母函數的唯一性則讓我們可以直接讀出分佈。最後一部分其實是同一個計算換了個面貌：$Z = \mathrm{e}^{\mu+\sigma X}$ 的冪，不過是 X 的某個倍數的指數函數而已。

解答

第 (i) 部分

設 $M(\theta) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X})$。則

$$M(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2-2\theta x)}\,\mathrm{d}x.$$

配方得 $x^2 - 2\theta x = (x-\theta)^2 - \theta^2$，所以

$$M(\theta) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}u,$$

其中用了代換 $u = x - \theta$。最後一個積分是標準正態概率密度函數（density）在整條實數線上的積分，其值為 1。因此，對任意實數 θ，

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2}.}$$

第 (ii) 部分

由於 X 與 Y 獨立，$\mathrm{e}^{\theta aX}$ 與 $\mathrm{e}^{\theta bY}$ 亦獨立，而獨立隨機變量（random variable）之積的期望值（expectation），等於各自期望值之積。把第 (i) 部分的 θ 分別換成 $a\theta$ 和 $b\theta$（並利用 Y 與 X 分佈相同這一事實），可得

$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta(aX+bY)}) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{a\theta X})\,\mathrm{E}(\mathrm{e}^{b\theta Y}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}a^2\theta^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}b^2\theta^2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(a^2+b^2)\theta^2}.$$

想一想 為甚麼矩母函數相同，就足以斷定分佈相同？

若矩母函數對 0 附近的所有 θ 都存在，它便唯一地決定了分佈。所以，$aX+bY$ 與 X 分佈相同，當且僅當其矩母函數對所有 θ 都等於 $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2}$，即

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(a^2+b^2)\theta^2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2} \quad \text{對所有}\theta.$$

取對數，並任選一個 $\theta \neq 0$，可知上式成立當且僅當

$$\boxed{a^2+b^2=1.}$$

（「僅當」這個方向不用唯一性也顯而易見：$\mathrm{Var}(aX+bY) = a^2+b^2$ 必須等於 $\mathrm{Var}(X) = 1$。）一般而言，$aX+bY$ 服從平均值（mean）為 0、方差（variance）為 a^2+b^2 的正態分佈；例如 $(X+Y)/\sqrt{2}$ 仍然是標準正態。

第 (iii) 部分

對任意實數 θ，

$$Z^\theta = (\mathrm{e}^{\mu+\sigma X})^\theta = \mathrm{e}^{\mu\theta}\,\mathrm{e}^{(\sigma\theta)X},$$

而 $\mathrm{e}^{\mu\theta}$ 是常數，所以把第 (i) 部分的 θ 換成 $\sigma\theta$，便得

$$\mathrm{E}(Z^\theta) = \mathrm{e}^{\mu\theta}\,\mathrm{E}(\mathrm{e}^{(\sigma\theta)X}) = \mathrm{e}^{\mu\theta}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2} = \mathrm{e}^{\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2},$$

這正是所要證明的結果。

取 $\theta = 1$ 便得平均值：

$$\boxed{\mathrm{E}(Z) = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}.}$$

取 $\theta = 2$ 得 $\mathrm{E}(Z^2) = \mathrm{e}^{2\mu+2\sigma^2}$，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{E}(Z^2) - (\mathrm{E}(Z))^2 = \mathrm{e}^{2\mu+2\sigma^2} - \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2} \\ &= \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1).\end{aligned}$$

驗算

- 對 $M(\theta) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2}$ 求導，得 $M'(0) = 0$ 及 $M''(0) = 1$：平均值為 0，方差為 1，與應有的結果一致。
- 若 $\sigma = 0$，則 $Z = \mathrm{e}^{\mu}$ 是常數；我們的公式給出平均值 e^{μ} 和方差 0。
- 數值上，取 $\mu = 0.3$ 和 $\sigma = 0.5$，對正態密度函數積分，得 $\mathrm{E}(Z) \approx 1.5296$ 及 $\mathrm{Var}(Z) \approx 0.6645$，與 $\mathrm{e}^{0.425}$ 和 $\mathrm{e}^{0.85}(\mathrm{e}^{0.25} - 1)$ 吻合。對 $0.6X + 0.8Y$ 進行模擬，所得樣本方差為 1.000。

常見錯誤

- 以「代入 X 的平均值」的方式寫出 $\mathrm{E}(Z) = \mathrm{e}^{\mu}$。一般而言 $\mathrm{E}(g(X)) \neq g(\mathrm{E}(X))$，而這裏指數函數的凸性（convexity）令平均值增大至 $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sigma^2}$ 倍。
- 把條件寫成 $a + b = 1$：相加的是方差，而不是係數。

STEP 之外

隨機變量 Z 服從對數正態（log-normal）分佈；凡是由許多細小的隨機因子連乘而增長的量，都以它為標準模型，例如布萊克–舒爾斯（Black–Scholes）模型中的股價。第 (ii) 部分讓我們窺見一個引人注目的事實：在方差有限的分佈之中，基本上只有正態分佈在適當縮放後求和，仍然留在同一個分佈族內，而這與中心極限定理（central limit theorem）息息相關。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）正好以這個程度講解矩母函數、正態分佈和中心極限定理。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。