詳細解答

STEP III 1997，第 11 題

力學 • 剛體轉動

> **STEP III 1997，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q11

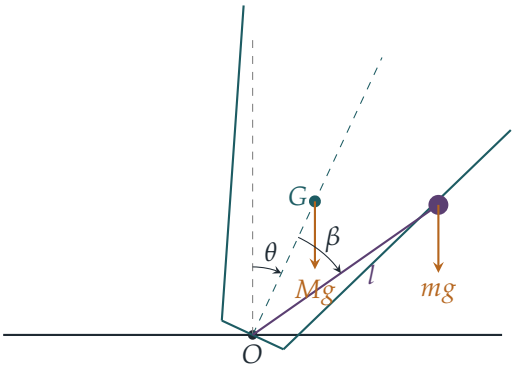
關鍵思路

只要鐘與鐘錘保持接觸，兩者便以相同的角速度（angular velocity）繞同一點 O 轉動，因此唯一能令它們分開的，就是角加速度（angular acceleration）的差異。不妨問：兩者各自獨立運動時，加速有多快？當自由擺動的鐘的角加速度剛好等於自由鐘錘的角加速度時，鐘錘與鐘便在那一瞬間分離。此時接觸力恰好為零，而角速度從頭到尾都沒有出現。

解答

模型。鐘是一個剛體（rigid body），可繞通過 O 的水平軸自由轉動，對該軸的轉動慣量（moment of inertia）為 Mk^2。鐘錘是一個質量為 m 的質點（particle），裝在長度為 l 的輕質剛桿上，同樣以 O 為樞軸。樞軸光滑，且沒有空氣阻力。所有角度均由向上的鉛垂線量起，以鐘錘相對於鐘軸所在的一側為正方向。設 θ 為鐘軸 OG 的角度。兩者接觸期間，鐘錘的桿與鐘軸一直保持夾角 β，所以桿的角度是 $\theta + \beta$。

在鐘內，鐘錘的球靠在內壁上，所靠的正是它本身會倒下去的那一側。因此內壁把球向後推（朝角度較小的方向），而根據牛頓第三定律（Newton's third law），球則把鐘向前推。設 $\Gamma \geq 0$ 為這個接觸力（包括任何摩擦力）對 O 的力矩（moment）。它對鐘錘的作用是 $-\Gamma$，對鐘的作用是 $+\Gamma$。



接觸期間的運動方程。分別對每個物體取對 O 的力矩（樞軸處的反作用力和桿中的張力對 O 均無力矩）：

$$\text{鐘錘：}\quad ml^2\ddot{\theta} = mgl\sin(\theta+\beta) - \Gamma,$$
$$\text{鐘：}\quad Mk^2\ddot{\theta} = Mgh\sin\theta + \Gamma.$$

重量 mg 的作用點與 O 相距 l，所在的直線與鉛垂線成角 $\theta+\beta$，所以它的力矩是 $mgl\sin(\theta+\beta)$；作用於 G 的 Mg 亦同理。兩個物體一起運動，所以有相同的 $\ddot{\theta}$。

把兩式相加，便可消去 Γ：

$$\ddot{\theta} = \frac{g(ml\sin(\theta+\beta) + Mh\sin\theta)}{ml^2 + Mk^2}.$$

代回鐘錘的方程並化簡，得

$$\Gamma = \frac{mMgl}{ml^2+Mk^2}\Big(k^2\sin(\theta+\beta) - hl\sin\theta\Big).$$

釋放時 $\theta = 0$，而 $\Gamma = \dfrac{mMglk^2\sin\beta}{ml^2+Mk^2} > 0$，所以鐘錘起初確實壓在鐘上，正如所料。

想一想 為甚麼不論角速度是多少，分離都恰好在 Γ 降至零的時候發生？

接觸只能推、不能拉，所以必須有 $\Gamma \geq 0$。當 $\Gamma > 0$ 時，自由的鐘錘會比鐘加速得更快，所以它被壓在內壁上，兩者一起運動。由於兩者以相同的角速度繞同一點 O 轉動，球與內壁之間的空隙只能因角加速度不同而出現。一旦 Γ 要變為負值，鐘本身的角加速度 $gh\sin\theta/k^2$ 便超過鐘錘的 $g\sin(\theta+\beta)/l$，內壁於是擺離球。所以分離發生在第一個令 $\Gamma = 0$ 的 θ。（在 $\theta = \pi$ 之前必定存在這樣的 θ，因為括號內的式子在 $\theta = 0$ 時是 $k^2\sin\beta > 0$，在 $\theta = \pi$ 時是 $-k^2\sin\beta < 0$。）

分離時的角度。設 $\alpha = \theta+\beta$，即分離時鐘錘的桿與向上鉛垂線所成的角。於是由 $\Gamma = 0$ 得

$$k^2\sin\alpha = hl\sin(\alpha-\beta) = hl(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta).$$

這裏 $0 < \alpha < \pi$，所以 $\sin\alpha \neq 0$，而且 $\sin\beta \neq 0$。兩邊除以 $hl\sin\alpha\sin\beta$：

$$\frac{k^2}{hl\sin\beta} = \cot\beta - \cot\alpha,$$

即

$$\cot\alpha = \cot\beta - \frac{k^2}{hl}\operatorname{cosec}\beta,$$

這正是所求的結果。留意兩個質量都沒有出現。

驗算

- 短鐘錘。當 $l \to 0$ 時，修正項趨向無窮大，所以 $\cot\alpha \to -\infty$，$\alpha \to \pi$。這很合理：短的擺有很大的自由角加速度 $g\sin\alpha/l$，所以裝在極短桿上的鐘錘會一直推着鐘，直至 $\sin\alpha$ 接近零，即直至兩者幾乎倒轉為止。
- 等價形式。這個條件其實就是 $\dfrac{g\sin\alpha}{l} = \dfrac{gh\sin(\alpha-\beta)}{k^2}$：自由的鐘錘與自由的鐘有相等的角加速度。
- 數值驗證。取 $k = 1$、$h = 0.6$、$l = 0.8$ 及 $\beta = 30°$，公式給出 $\cot\alpha = \sqrt{3} - 25/6 \approx -2.43$，所以 $\alpha \approx 157.7°$。由釋放一刻起對合併運動逐步作數值積分，到 Γ 首次降至零時停止，所得的角度與此相同，準確至小數點後多個位，而且 $M/m = 5$ 與 $M/m = 500$ 的情況皆然。

常見錯誤

- 用能量守恆（conservation of energy）求出 $\dot\theta$，然後試圖由圓周運動求「法向反作用力」。角速度是兩個物體共有的，對它們是否分離毫無影響。
- 由鐘軸而不是由向上的鉛垂線量度 α。在整段接觸期間，桿與鐘軸的夾角都是 β，所以 $\alpha = \theta + \beta$。
- 忘記 Mk^2 是對 O 而不是對 G 的轉動慣量。這裏無須用平行軸定理（parallel-axis theorem）作修正。

STEP 之外

要找出約束（constraint）何時失效，有一個通用的原則，而本題正是一個簡潔的例子：先解出受約束的運動，再計算約束力，然後找出它在何處變號。拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）利用拉格朗日乘數（Lagrange multipliers）把這個做法系統化，而這些乘數原來就是約束力。同樣的想法可以處理質點離開球面這個經典問題。

Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）涵蓋剛體繞固定軸的轉動，是極佳的預備讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。