詳細解答

STEP III 1997，第 10 題

力學 • 有滑動的滾動

STEP III 1997，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s3-q10

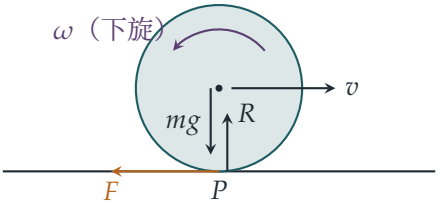
本題在 *Beyond STEP* 第 11.6 節後旋中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/backspin.html

關鍵思路

關鍵在於彈珠的底部是否正在桌面上滑動。只要它在滑動，摩擦力（friction）的大小和方向都固定不變，因此線運動和角運動都是勻減速的，可以準確地寫出來。當接觸點相對於桌面靜止時，滑動便告結束，此後彈珠作滾動，完全不受摩擦力。所以整道題目問的就是哪一件事最先發生：$v = 0$、$\omega = 0$，還是滑動速度（slip velocity）降至零。

解答

模型。 彈珠是質量為 m、半徑為 a 的均勻實心球，所以它對直徑的轉動慣量（moment of inertia）為 $I = \frac{2}{5}ma^2$。取 v 為球心的速度（以 v_0 的方向為正），ω 為向後轉動方向的角速度（angular velocity）（下旋（backspin）為正），於是 $v(0) = v_0 > 0$ 及 $\omega(0) = \omega_0 > 0$。手指只負責令彈珠開始運動；其後作用於彈珠的力只有重量 mg、法向反作用力（normal reaction）$R = mg$ 以及接觸點 P 處的摩擦力 F。



在下旋的情況下，彈珠底部相對於球心以速率 $a\omega$ 向前運動，所以接觸點的速度為

$$s = v + a\omega.$$

起初 $s = v_0 + a\omega_0 > 0$：彈珠在桌面上向前打滑，所以摩擦力向後作用，大小恆為 F。記 $F = mk$。

滑動期間的運動方程。 沿水平方向分解，得 $m\dot{v} = -F$。對球心取力矩（moment），底部向後的摩擦力會使彈珠朝向前滾動的方向轉動，因此它會減弱下旋：

$$\tfrac{2}{5}ma^2\,\dot{\omega} = -Fa \quad\Longrightarrow\quad \dot{\omega} = -\frac{5k}{2a}.$$

兩者皆為常數，所以只要彈珠繼續向前滑動，

$$v = v_0 - kt, \qquad a\omega = a\omega_0 - \tfrac{5}{2}kt, \qquad s = v_0 + a\omega_0 - \tfrac{7}{2}kt.$$

因此滑動速度降至零的時刻為

$$t_1 = \frac{2(v_0 + a\omega_0)}{7k},$$

而在此之前摩擦力的方向一直不變，所以這些公式在整個區間 $0 \le t \le t_1$ 上都成立，即使 v 或 ω 在途中改變了符號亦然。

> **想一想** 在 $t = t_1$ 時會發生甚麼事？為甚麼彈珠不會隨即向相反方向滑動？

在 t_1 時接觸點靜止，所以 $v = -a\omega$：彈珠正在滾動。假如它繼續以恆定速率滾動，便不需要任何力去推動它，所以摩擦力（一旦沒有滑動，它只需要有多大便有多大）為零，而以恆定速度滾動與所有方程都相容。因此由 t_1 起，彈珠作勻速滾動，速度為

$$V = v(t_1) = v_0 - \tfrac{2}{7}(v_0 + a\omega_0) = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7}.$$

第 (i) 部分

要彈珠最終完全靜止，最後的滾動速度必須為零：$V = 0$，所以 $5v_0 = 2a\omega_0$，即

$$\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{2}{5}.$$

檢查一下這個情景是否合理：取這個比值時，$v = 0$ 發生於 $t = v_0/k$，而 $\omega = 0$ 發生於 $t = 2a\omega_0/(5k) = v_0/k$，是同一時刻，而這亦正是 t_1。所以線運動和角運動在彈珠仍在滑動時一同消失，此後彈珠保持靜止（沒有滑動，也沒有摩擦力）。

第 (ii) 部分

現在彈珠最終必須以速率 $v_0/7$ 向後滾動，所以 $V = -v_0/7$：

$$\frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7} = -\frac{v_0}{7} \quad\Longrightarrow\quad 6v_0 = 2a\omega_0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{1}{3}.$$

取這個比值時，v 在 $t = v_0/k$ 時降至零，這早於 $t_1 = 2(v_0 + 3v_0)/(7k) = 8v_0/(7k)$。在那一瞬間彈珠暫時不動，但仍帶有下旋 $\omega = \omega_0 - \frac{5v_0}{2a} = \frac{v_0}{2a} > 0$，所以底部仍在向前打滑，摩擦力繼續把它往後拉。在 t_1 時我們得到 $v = -v_0/7$ 及 $a\omega = v_0/7$，所以它以速率 $v_0/7$ 朝起點滾回去，符合要求。

想一想 有沒有更快捷的方法，毋須解出 t_1 便可求得 V？

有。在桌面上沿運動路線取一個固定點 O，考慮對該點的角動量（angular momentum）。摩擦力沿桌面作用，所以它對 O 沒有力矩，而 R 與 mg 的力矩互相抵消。以向前滾動的方向為正，對 O 的角動量等於 mva（球心位於高度 a 處）減去自旋部分 $\frac{2}{5}ma^2\omega$，所以這個量守恆：

$$mv_0a - \tfrac{2}{5}ma^2\omega_0 = maV + \tfrac{2}{5}ma^2 \cdot \frac{V}{a} = \tfrac{7}{5}maV,$$

再次得出 $V = (5v_0 - 2a\omega_0)/7$。

驗算

- 沒有旋轉（$\omega_0 = 0$）時，公式給出 $V = \frac{5}{7}v_0$，這是不帶旋轉、打滑射出的球的標準結果。
- 若 $v_0 = 0$ 而只有下旋，則 $V = -\frac{2}{7}a\omega_0 < 0$：彈珠向後運動，任何彈過帶下旋彈珠的人都知道這一點。
- 以數值方法逐步推算這些方程（滑動速度一降至零便關掉摩擦力），當 $v_0 = 1$、$a\omega_0 = 3$ 時最終速度為 $-0.142857\ldots = -\frac{1}{7}$，而當 $v_0 = 2$、$a\omega_0 = 5$ 時則完全停下。

常見錯誤

- 在 $v = 0$ 時便停止計時。彈珠要到 $v + a\omega = 0$ 時才停止滑動；在 $v = 0$ 時它可能仍在旋轉，正如第 (ii) 部分的情況。
- 弄錯力矩（torque）的符號：底部向後的摩擦力會*減弱*下旋。
- 滾動開始後仍然保留摩擦力。一旦沒有滑動，保持恆定速度並不需要摩擦力，所以摩擦力降為零。

STEP 之外

這裏的摩擦力採用的是庫侖（Coulomb）的滑動摩擦模型：表面相對滑動時大小恆定，不滑動時則需要多少便有多少（不超過某個上限）。角動量的捷徑是剛體動力學（rigid-body dynamics）中一條普遍原則的例子：選取適當的參考點，使那個麻煩的未知力沒

有力矩。桌球（snooker）和英式撞球（billiards）球手打縮桿（screw-back）時，利用的正是這套物理。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）正是以這種思路處理剛體轉動和帶滑動的滾動。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。