詳細解答

STEP III 1997，第 1 題

純數學 • 指數冪級數

STEP III 1997，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s3-q1

關鍵思路

把 $\mathrm{e}^x = \sum x^n/n!$ 乘以一個多項式（polynomial），相當於把級數（series）逐項向後平移。於是 x^n 的係數（coefficient）就是 $1/n!$、$1/(n-1)!$、$1/(n-2)!$,… 的組合；以 $n!$ 作公分母通分後，分子是一個關於 n 的多項式。代入 $x = 1$，冪級數（power series）的恆等式就變成一個數值級數的恆等式。因此整道題的關鍵，在於選出能產生所需分子的多項式。下降階乘（falling factorials）n、$n(n-1)$、$n(n-1)(n-2)$ 是最自然的基本組件，因為 $n(n-1)\cdots(n-k+1)/n! = 1/(n-k)!$。

解答

在整個解答中，$\mathrm{e}^x = \sum_{n\geq 0} x^n/n!$ 對所有實數 x 都絕對收斂（converges absolutely）。把它乘以一個多項式，得到的是有限個這類級數之和，所以我們可以把這些級數逐項相加，然後代入 $x = 1$。我們約定：當 m 為負整數時，$1/m! = 0$。這樣，下面每一個和式都可以由 $n = 0$ 開始。

第 (i) 部分

我們有

$$(x^2+5x+4)\,\mathrm{e}^x = \sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+2}}{n!} + 5\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{n!} + 4\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}.$$

要合併 x^n 的係數，先把頭兩個和式重新編排下標（reindex）。該係數為

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n-2)!}+\frac{5}{(n-1)!}+\frac{4}{n!} &= \frac{n(n-1)+5n+4}{n!}\\ &= \frac{n^2+4n+4}{n!} = \frac{(n+2)^2}{n!}.\end{aligned}$$

這對所有 $n \geq 0$ 都成立，包括 $n = 0$ 和 $n = 1$：在這兩個情況下，約定 $1/m! = 0$ 會把不存在的項消去。（當 $n = 0$ 時，係數為 $4 = 2^2/0!$；當 $n = 1$ 時，係數為 $5+4 = 9 = 3^2/1!$。）因此

$$(x^2+5x+4)\,\mathrm{e}^x = \sum_{n\geq 0}\frac{(n+2)^2}{n!}\,x^n,$$

代入 $x = 1$ 得

$$10\,\mathrm{e} = \frac{2^2}{0!}+\frac{3^2}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\frac{5^2}{3!}+\cdots = 4+\frac{3^2}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\cdots,$$

這正是所要證明的結果。

第 (ii) 部分

現在通項（general term）是 $(n+1)^2/n!$，所以我們要找一個二次式 x^2+bx+c，使其級數的係數為

$$\frac{n(n-1)+bn+c}{n!} = \frac{(n+1)^2}{n!}.$$

想一想 怎樣才能不靠猜測而求出 b 和 c？

把目標分子寫成下降階乘的形式：$n^2+2n+1 = n(n-1)+3n+1$。比較係數得 $b = 3$ 和 $c = 1$。於是，按照與第 (i) 部分完全相同的論證，

$$(x^2+3x+1)\,\mathrm{e}^x = \sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)^2}{n!}\,x^n,$$

代入 $x = 1$ 得

$$(1+3+1)\,\mathrm{e} = 5\,\mathrm{e} = 1+\frac{2^2}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{4^2}{3!}+\cdots.$$

第 (iii) 部分

通項是 $(n+1)^3/n!$，所以這次需要一個三次式。$(ax^3+bx^2+cx+d)\,\mathrm{e}^x$ 中 x^n 的係數為

$$\frac{a}{(n-3)!}+\frac{b}{(n-2)!}+\frac{c}{(n-1)!}+\frac{d}{n!} = \frac{a\,n(n-1)(n-2)+b\,n(n-1)+c\,n+d}{n!}.$$

我們把目標分子展開成下降階乘。由於 $n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$ 及 $n^2 = n(n-1) + n$，

$$\begin{aligned}(n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= [n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n] + 3[n(n-1) + n] + 3n + 1 \\ &= n(n-1)(n-2) + 6n(n-1) + 7n + 1.\end{aligned}$$

（以 $n = 1$ 快速驗算：兩邊都等於 8。以 $n = 2$ 驗算：$27 = 0 + 12 + 14 + 1$。）所以 $a = 1$、$b = 6$、$c = 7$、$d = 1$，而

$$(x^3 + 6x^2 + 7x + 1)\,\mathrm{e}^x = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)^3}{n!}\, x^n.$$

代入 $x = 1$，

$$1 + \frac{2^3}{1!} + \frac{3^3}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \cdots = (1 + 6 + 7 + 1)\,\mathrm{e} = 15\,\mathrm{e}.$$

想一想 為甚麼不能直接把級數逐項平方或立方？

因為 $\sum (n+1)^3/n!$ 並不能以任何簡單的方式由 $\sum (n+1)/n!$ 構造出來。和式對分子而言是線性的，所以我們能做的，是把分子拆成若干個 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ 形式的部分；每一部分都與 $n!$ 約分，得出 e 的級數平移後的版本。每一個這樣的部分在 $x = 1$ 時都恰好貢獻 e。因此答案就是 e 乘以各下降階乘係數之和，即 $1 + 6 + 7 + 1 = 15$。

驗算

- 計算至 $n = 60$ 的部分和（partial sums），得 27.1828…、13.5914… 和 40.7742…，在機器精度內與 10e、5e 和 15e 吻合。
- 三個分子恆等式中的係數，已就 $n = 0, \ldots, 39$ 逐一精確驗證。
- 一致性：第 (ii) 部分的級數是 $\sum (n+1)^2/n!$，第 (i) 部分的是 $\sum (n+2)^2/n!$。兩者之差 $\sum (2n+3)/n! = 2\sum n/n! + 3\sum 1/n! = 2\mathrm{e} + 3\mathrm{e} = 5\mathrm{e}$，確實等於 $10\mathrm{e} - 5\mathrm{e}$。

常見錯誤

- 忘記在重新編排和式的下標時，頭兩項（$n = 0, 1$）需要另行處理。約定 $m < 0$ 時 $1/m! = 0$ 可以處理這兩項，但你仍應親自檢查。
- 把 $(n+1)^3$ 與冪 n^3, n^2, n 比較係數，而不是與下降階乘比較，結果選錯了三次式。

STEP 之外

和式 $\sum_{n\geq 0} n^k/n!$ 等於 $B_k\,\mathrm{e}$，其中 B_k 是第 k 個貝爾數（Bell number），即把一個含 k 個元素的集合劃分（partition）的方法數目：$B_0,\ldots,B_4 = 1,1,2,5,15$。這就是 Dobiński 公式（Dobiński's formula）。事實上，設 $m = n+1$，第 (iii) 部分就是 $\sum_{m\geq 1} m^4/m! = B_4\,\mathrm{e} = 15\,\mathrm{e}$，而係數 $1,6,7,1$ 正是第二類斯特靈數（Stirling numbers of the second kind）$1,7,6,1$ 倒過來的次序。冪級數之所以可以逐項重排和合併，依據是絕對收斂，這是大學一年級分析學（analysis）的一個主題。理論方面可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*；想做更多同類題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。