詳細解答

STEP II 1997，第 9 題

力學 • 摩擦力與剛體平衡

STEP II 1997，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

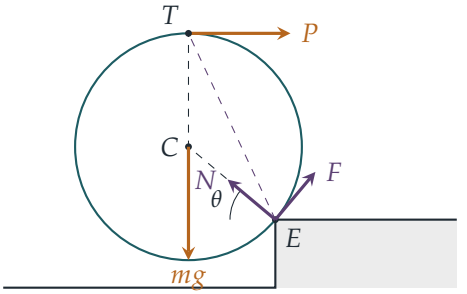
step.maths.org/questions/97-s2-q9

關鍵思路

由於球是被緩慢地拉上去的，它在每一瞬間都處於平衡（equilibrium）狀態，所以在每個位置我們面對的都是一道靜力學（statics）問題。球一旦離開地面，就只有三個力作用在它身上：重量、頂點處的拉力，以及台階邊緣的反作用力（reaction）。對邊緣取力矩（moments），便可消去未知的反作用力，從而求出拉力。然後，三力定則（three-force rule，即三條作用線（lines of action）必須交於一點）確切地告訴我們反作用力指向哪個方向，而摩擦力（friction）的條件也就幾乎唾手可得。

解答

設半徑為 $r = \frac{1}{2}d$，則台階的高度為 $\frac{1}{4}d = \frac{1}{2}r$。我們把球看成均勻的剛體（rigid body），它只在邊緣 E 處與台階接觸（邊緣是一條水平線，在通過球心的鉛垂截面中是一個點）。設 C 為球心，T 為最高點，水平力 P 作用於該點，方向指向台階。設 θ 為 EC 與水平線所成的角。



幾何關係

以 E 為原點，C 比 E 高出 $r\sin\theta$，與它的水平距離為 $r\cos\theta$，而 T 則在 C 之上再高出 r。開始時，球靜止在地面上，C 離地面的高度為 r，即比 E 高出 $\frac{1}{2}r$；因此 $\sin\theta = \frac{1}{2}$，$\theta = \frac{\pi}{6}$。當 C 位於 E 的正上方，即 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時，球便完全登上台階。所以整個運動過程對應於 θ 由 $\frac{\pi}{6}$ 增加至 $\frac{\pi}{2}$。

最大的力

當球仍然接觸地面時，地面承擔了部分重量，而地面只能向上推。當 P 剛好大得足以令地面的反作用力降至零時，球便開始上升。從這時起，作用於球的力是：在 T 處的 P、在 C 處的重量 mg，以及邊緣在 E 處的反作用力，後者有沿 EC 方向的法向分量（normal component）N 和垂直於 EC 的摩擦力 F。

對 E 取力矩（反作用力對該點沒有力矩），P 的力臂是 T 高出 E 的高度，即 $r(1+\sin\theta)$，而重量的力臂是 $r\cos\theta$。由平衡條件得

$$P\,r(1+\sin\theta) = mg\,r\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{mg\cos\theta}{1+\sin\theta}.$$

在 $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 上，分子遞減而分母遞增，所以 P 隨 θ 遞減。（在離地之前，P 只是逐漸增大至這個值。）因此最大值出現在 $\theta = \frac{\pi}{6}$，即球離開地面的一刻：

$$P_{\max} = \frac{mg\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{mg}{\sqrt{3}}.$$

摩擦力的條件

想一想 邊緣處的反作用力指向哪個方向？

三個互不平行的力若處於平衡，它們的作用線必定共點（concurrent）。P 的作用線是通過 T 的水平線，而重量的作用線是通過 C 的鉛垂線，這條線同樣通過 T。所以兩者交於 T，而 E 處的總反作用力必定沿 ET 作用。

現在 $CE = CT = r$，所以三角形 CET 是等腰三角形。在 C 處，CT（鉛垂向上）與 CE（向下，與水平線成 θ 角）之間的夾角是 $\frac{\pi}{2}+\theta$，所以每個底角是

$$\angle CET = \tfrac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\theta}{2}.$$

這就是總反作用力與法線 EC 之間的夾角，所以

$$\frac{F}{N} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right).$$

我們可以用分解（resolving）力的方法來驗證這個結果。反作用力是 $(-P,\, mg)$，因為它要抵消 P 和重量。它沿單位法向量 $(-\cos\theta, \sin\theta)$ 和沿單位切向量 $(\sin\theta, \cos\theta)$ 的分量

分別是

$$N = P\cos\theta + mg\sin\theta = mg\,\frac{\cos^2\theta + \sin\theta + \sin^2\theta}{1+\sin\theta} = mg,$$
$$F = mg\cos\theta - P\sin\theta = mg\cos\theta\left(1 - \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right) = \frac{mg\cos\theta}{1+\sin\theta},$$

所以 $F/N = \cos\theta/(1+\sin\theta)$，而根據半角公式（half-angle formulae），這等於 $\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$。在整個過程中 F 和 N 都是正數，所以邊緣確實是在推着球，而摩擦力沿切線向上作用，正如圖中所畫。

只有當在每個位置都有 $F \le \mu N$ 時，球才不會在 E 處滑動，即

$$\mu \ge \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{對所有} \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

右邊隨 θ 增加而遞減，所以要求最嚴格的位置同樣是 $\theta = \frac{\pi}{6}$，這時它等於 $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$。在那一瞬間，摩擦力必須至少是法向反作用力的 $1/\sqrt{3}$ 倍；若 $\mu = 1/\sqrt{3}$ 恰好成立，摩擦力便達到極限（limiting），球正處於即將滑動的狀態，所以要安全地把球拉上去而不滑動，我們需要 $\mu > 1/\sqrt{3}$，這正是所要求的結果。

驗算

- 當 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時，球心在邊緣的正上方：$P = 0$ 而且 $F = 0$，理應如此。
- 整個過程中 $N = mg$，這是合理的：反作用力是 $(-P, mg)$，而它沿法線方向的分量算出來恰好是 mg。
- 以數值方法驗算：讓 θ 由 $\frac{\pi}{6}$ 逐步增加至 $\frac{\pi}{2}$，分別用取力矩和分解力的方法計算，P/mg 和 F/N 的最大值都是 $0.57735\ldots = 1/\sqrt{3}$，兩者都出現在起始位置。

常見錯誤

- 把 P 對 E 的力臂當作 $r\sin\theta$（C 的高度），而不是 $r(1+\sin\theta)$（T 的高度）。
- 假設邊緣處的反作用力純粹沿法線方向。這是不可能的：法線通過 C，這樣三個力便不能交於一點。

STEP 之外

三力的論證是一個普遍事實的特例：剛體處於平衡，當且僅當合力以及對任意一點的合力矩都等於零，而對於三個力的情況，這就迫使它們共點。反作用力與法線之間的夾角

（這裏是 $\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$）就是「摩擦角」（angle of friction）的概念，它把摩擦力問題轉化為幾何問題。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）從這些原理出發，建立剛體的靜力學和動力學。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。