詳細解答

STEP II 1997，第 8 題

純數學 • 以積分證明不等式

> **STEP II 1997，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q8

關鍵思路

每個形如 $(x^p - 1)/p$ 的式子，其實都是喬裝了的積分（integral）：它就是 $\int_1^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t$。因此，比較兩個這樣的式子，歸根究底就是比較被積函數（integrand）t^{p-1} 與 t^{q-1}；只要留意到兩者的大小關係在 $t = 1$ 處對調，這個比較便很容易。至於最後的不等式（inequality），只需再積分一次，這次是對剛證明的不等式積分。

解答

對不等式積分

若在 $[a, b]$ 上有 $\mathrm{f}(t) \geq \mathrm{g}(t)$，則在該區間上 $\mathrm{f} - \mathrm{g} \geq 0$，所以 $\mathrm{f} - \mathrm{g}$ 的圖像與 t-軸之間的區域位於軸上或軸的上方，其有向面積（signed area）為非負：

$$\int_a^b \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b \mathrm{g}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (\mathrm{f}(t) - \mathrm{g}(t))\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

注意這裏需要 $a \leq b$：若上下限的次序顛倒，兩個積分之間的不等號便會反轉。

$x \geq 1$ 的情況

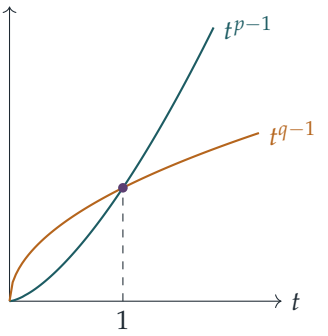
當 $t \geq 1$ 且 $p > q$ 時，有 $t^{p-1} = t^{q-1}t^{p-q} \geq t^{q-1}$，因為當 $t \geq 1$ 且 $p - q > 0$ 時 $t^{p-q} \geq 1$。由於 $x \geq 1$，區間 $[1, x]$ 的上下限次序正確，所以由第一部分可得

$$\int_1^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t \;\geq\; \int_1^x t^{q-1}\,\mathrm{d}t.$$

因為 $p, q > 0$，兩個積分都可以直接計算：

$$\int_1^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^p}{p}\right]_1^x = \frac{x^p - 1}{p}, \qquad \int_1^x t^{q-1}\,\mathrm{d}t = \frac{x^q - 1}{q}.$$

因此對 $x \geq 1$ 有 $\dfrac{x^p - 1}{p} \geq \dfrac{x^q - 1}{q}$，正如所求。



這幅草圖（以 $p = 2.5$、$q = 1.5$ 繪畫）說明了要點：當 $t > 1$ 時，次數較高的冪較大；當 $0 < t < 1$ 時則較小。

$0 \leq x \leq 1$ 的情況

想一想 當 $0 < t < 1$ 時，t^{p-1} 與 t^{q-1} 之間的不等號方向相反。為甚麼結論沒有跟着反轉？

兩次反轉互相抵消。當 $0 < t \leq 1$ 時，有 $t^{p-q} \leq 1$，所以 $t^{p-1} \leq t^{q-1}$。但現在 $x \leq 1$，所以次序正確的區間是 $[x, 1]$，而不是 $[1, x]$。

先考慮 $0 < x \leq 1$。在 $[x, 1]$ 上對 $t^{q-1} \geq t^{p-1}$ 積分（由於 $x > 0$，兩者在該區間上都連續（continuous）），得

$$\int_x^1 t^{q-1}\,\mathrm{d}t \;\geq\; \int_x^1 t^{p-1}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{即} \qquad \frac{1 - x^q}{q} \;\geq\; \frac{1 - x^p}{p}.$$

兩邊乘以 -1，不等號反轉，得 $\dfrac{x^p - 1}{p} \geq \dfrac{x^q - 1}{q}$。

當 $x = 0$ 時，我們直接驗證：不等式變成 $-\frac{1}{p} \geq -\frac{1}{q}$，這是成立的，因為由 $p > q > 0$ 可得 $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$。（我們把 $x = 0$ 分開處理，是因為若 $q < 1$，則 t^{q-1} 在 0 附近無界（unbounded）。）所以不等式對所有 $0 \leq x \leq 1$ 成立；連同上一個情況，對每個 $x \geq 0$ 都成立。

最後的不等式

記 $\phi_p(t) = \dfrac{t^p - 1}{p}$。我們已經證明：只要 $p > q > 0$，對每個 $t \geq 0$ 都有 $\phi_p(t) \geq \phi_q(t)$。兩個函數在 $[0, \infty)$ 上都連續，所以當 $x > 0$ 時，我們可以在 $[0, x]$ 上對這個不等式積分：

$$\int_0^x \frac{t^p - 1}{p}\,\mathrm{d}t \;\geq\; \int_0^x \frac{t^q - 1}{q}\,\mathrm{d}t.$$

而

$$\int_0^x \frac{t^p - 1}{p}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p}\Big(\frac{x^{p+1}}{p+1} - x\Big) = \frac{x}{p}\Big(\frac{x^p}{p+1} - 1\Big),$$

對 q 亦同樣。所以

$$\frac{x}{p}\Big(\frac{x^p}{p+1} - 1\Big) \;\geq\; \frac{x}{q}\Big(\frac{x^q}{q+1} - 1\Big),$$

兩邊除以 $x > 0$（不等號方向不變），得

$$\frac{1}{p}\Big(\frac{x^p}{p+1} - 1\Big) \;\geq\; \frac{1}{q}\Big(\frac{x^q}{q+1} - 1\Big).$$

在 $x = 0$ 處，這個不等式變成 $-\frac{1}{p} \geq -\frac{1}{q}$，我們已經知道它成立。至此，對所有 $x \geq 0$ 的證明完成。

驗算

- 在 $x = 1$ 處，中間的不等式是 $0 \geq 0$：兩條曲線在該處相交，與等號成立吻合。
- 在最後的不等式中取 $p = 2$、$q = 1$、$x = 3$：左邊是 $\frac{1}{2}(3 - 1) = 1$，右邊是 $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$，所以 $1 \geq \frac{1}{2}$。
- 隨機測試了 200,000 組滿足 $0 < q < p$ 及 $x \geq 0$ 的三元組 (p, q, x)，當中包括 $x = 0$、$x = 1$ 及極小的 x，兩個不等式都找不到反例（counterexample）。

常見錯誤

- 當 $x < 1$ 時在 $[1, x]$ 上積分，卻保持不等號方向不變：對不等式積分之前，上下限必須按遞增次序排列。
- 忘記端點 $x = 0$，在該處 t^{q-1} 甚至可能沒有定義。
- 試圖用微積分從頭證明最後一部分，而不是對剛建立的不等式積分。

STEP 之外

當 $q \to 0$ 時，$(x^q - 1)/q \to \ln x$，所以這個結果表明：當 p 遞減至 0 時，$(x^p - 1)/p$ 遞減至 $\ln x$。這是對數的一族精巧的界，也是統計學中 Box–Cox 變換（Box–Cox transformation）的基礎。積分保持不等式這個原理（積分的單調性，monotonicity of the integral），是分析（analysis）課程中關於黎曼積分（Riemann integral）最先證明的定理之一。參見 Abbott, *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。