詳細解答

STEP II 1997，第 7 題

純數學 • 曲線描繪

> **STEP II 1997，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q7

關鍵思路

右邊只透過 x^2 依賴於 x，因此可把它看成 $u = x^2$ 的二次式，然後配方（complete the square）：這樣一行就得出 y^2 的最大可能值，完全不需要微積分。至於作圖，把 $x \to -x$ 或 $y \to -y$ 時方程不變，所以只需弄清楚第一象限的情況，再作反射即可。值得確定的地方有：曲線與兩軸相交之處、在原點的斜率，以及曲線在原點以外與 x 軸相交之處的斜率。

解答

最大值與最小值

若 $a = 0$，方程變成 $y^2 = -x^4$，這迫使 $x = y = 0$：這條「曲線」只是單獨一點 $(0,0)$，而 y 唯一的值是 0。以下設 $a \neq 0$。方程中只出現 a^2，所以不妨設 $a > 0$，到最後才寫成 $|a|$。

由於 $y^2 \geq 0$，我們需要 $x^2(a^2 - x^2) \geq 0$，即 $x = 0$ 或 $x^2 \leq a^2$。所以曲線位於帶狀區域 $-|a| \leq x \leq |a|$ 之內。對 x^2 配方，

$$y^2 = a^2x^2 - x^4 = \frac{a^4}{4} - \left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2 \leq \frac{a^4}{4},$$

等號成立當且僅當 $x^2 = \frac{1}{2}a^2$。因此在曲線上處處有 $|y| \leq \frac{1}{2}a^2$，而 $y = \frac{1}{2}a^2$ 和 $y = -\frac{1}{2}a^2$ 兩個值都能取得，取於 $x = \pm|a|/\sqrt{2}$。所以

$$\boxed{y_{\max} = \frac{a^2}{2}, \qquad y_{\min} = -\frac{a^2}{2}, \qquad \text{兩者皆取於} x = \pm\frac{|a|}{\sqrt{2}}.}$$

想一想 這與微積分的結果是否吻合？$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ 在哪裏成立？

作隱函數求導（implicit differentiation），$2y\,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2a^2x - 4x^3 = 2x(a^2 - 2x^2)$。在 $y \neq 0$ 之處，斜率為零當且僅當 $x^2 = \frac{1}{2}a^2$（根 $x = 0$ 對應 $y = 0$），這正是上面找到的四個點。$y = 0$ 的點需要另行小心處理，因為在那裏不能除以 y；我們接着就處理它們。兩種方法結果一致，但配方能即時證明這些駐值（stationary values）就是整體的最大值和最小值。

曲線的形狀

取 $a > 0$。解出 y 得到兩個分支，

$$y = x\sqrt{a^2 - x^2} \qquad 及 \qquad y = -x\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad -a \leq x \leq a,$$

兩者互為對 x 軸的反射。在第一個分支上，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

- **在原點**，斜率是 a，而在另一個分支上則是 $-a$。所以曲線兩次經過原點，並在那裏與自身相交，切線為 $y = \pm ax$。
- **在** $x = \pm a$，我們有 $y = 0$，而當 $x \to a^-$ 時斜率趨向 $-\infty$。所以曲線在 $(\pm a, 0)$ 與 x 軸相交，切線是鉛垂的；曲線在那裏平滑而圓渾，並非尖角。
- **在兩者之間**，第一個分支由 $(0,0)$ 上升至 $x = a/\sqrt{2}$ 處的最大值 $\frac{1}{2}a^2$，再下降回到 $(a,0)$。其餘象限的情況可由對兩軸的對稱性得出。

結果是一個橫臥的 8 字形，在 $x \geq 0$ 和 $x \leq 0$ 各有一個環，闊度為 $2|a|$，總高度為 a^2。

要一次過看清整條曲線，有一個簡潔的方法：設 $x = a\sin t$。那麼 $a^2 - x^2 = a^2\cos^2 t$，所以 $y^2 = a^4 \sin^2 t \cos^2 t$，而曲線可由

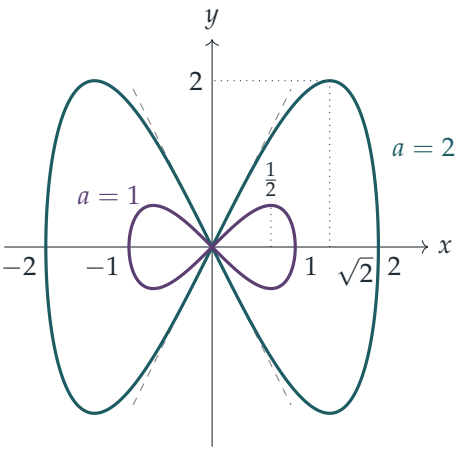
$$x = a\sin t, \qquad y = \tfrac{1}{2}a^2 \sin 2t, \qquad 0 \leq t < 2\pi,$$

描出，這再次顯示 $|y| \leq \frac{1}{2}a^2$。

$a = 1$ 與 $a = 2$ 的情況

	與 x 軸相交於	在 O 的切線	極值點
$a = 1$	$x = 0,\ \pm 1$	$y = \pm x$	$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}\right)$
$a = 2$	$x = 0,\ \pm 2$	$y = \pm 2x$	$\left(\pm\sqrt{2}, \pm 2\right)$

要確定兩條曲線的相對位置：對於 $0 < |x| \le 1$，我們有 $x^2(1-x^2) < x^2(4-x^2)$，所以 $a = 1$ 的曲線嚴格位於 $a = 2$ 的曲線之內，唯一的公共點是原點。例如，在 $x = 1$ 處，$a = 1$ 的曲線位於 $y = 0$，而 $a = 2$ 的曲線則位於 $y = \pm\sqrt{3}$。



虛線是 $a = 2$ 時的切線 $y = \pm 2x$；當 $a = 1$ 時，在原點的切線是 $y = \pm x$，傾角為 45°。

驗算

- 對 50 個隨機的 a 值，在 $|x| \le |a|$ 上作網格搜尋，每次找到的最大 $|y|$ 都是 $\frac{1}{2}a^2$，位於 $|x| = |a|/\sqrt{2} \approx 0.7071|a|$。當 $a = 2$ 時，結果是 $y_{\max} = 2.000000$，位於 $|x| \approx 1.41421$。
- 最大值按 a^2 的比例變化，這是必然的：把 (x, y) 換成 (ax, a^2y)，就把 $a = 1$ 的曲線變成一般的曲線。所以 $a = 2$ 的曲線就是把 $a = 1$ 的曲線沿水平方向拉伸 2 倍、沿鉛垂方向拉伸 4 倍而成，這就是它高出那麼多的原因。

常見錯誤

- 只畫出 $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$。方程定義的是 y^2，所以 y 的正負兩個值都屬於圖像，得出的是兩個環，而不是 S 形。
- 在 $(\pm a, 0)$ 畫出尖角。那裏的斜率是無限大，所以曲線是鉛垂而平滑地穿過 x 軸的。
- 忘記曲線在原點與自身相交，斜率為 $\pm a$。正是這些斜率讓我們在 O 附近分辨出兩條曲線。

STEP 之外

這裏的原點是一個結點（node），即代數曲線（algebraic curve）與自身相交的點：在 O 附近，方程看起來就像 $y^2 \approx a^2x^2$，即一對直線 $y = \pm ax$。像這樣按最低次項把奇點（singular point）分類，是研究代數曲線的第一步。$x = a\sin t$ 這個技巧顯示這條曲線可以用三角函數參數化（parametrise）；這類曲線稱為利薩茹圖形（Lissajous figures）（這裏的頻率比為 $1:2$）。若想多練習描繪這類曲線，以及更廣泛地練習 STEP 的思考方式，可閱讀 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。