詳細解答

STEP II 1997，第 6 題

純數學 • 三角方程

> **STEP II 1997，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q6

關鍵思路

把所有式子都用 $t = \tan\theta$ 表示。三倍角公式（triple-angle formula）把方程化為 t 的三次方程（cubic），而一旦看出一個容易的根，餘下的二次方程正好就是第一部分的那一個，因此它的根可以用一個二倍角（double-angle）條件來處理，而不必計算 $\tan^{-1}(1\pm\sqrt{2})$。餘切（cotangent）方程其實是同一個方程的變相：代換（substitution）$\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$ 把 cot 換成 tan。

解答

開首的結果

設 $t = \tan\phi$，其中 $t^2 = 2t + 1$。那麼 $1 - t^2 = -2t$。此外 $t \neq 0$，因為 $t = 0$ 不滿足 $t^2 = 2t + 1$；而且 $t^2 \neq 1$（否則 $2t = 0$）。所以 $\tan 2\phi$ 有定義，並且

$$\tan 2\phi = \frac{2t}{1 - t^2} = \frac{2t}{-2t} = -1,$$

這正是所要證明的。

逆命題(converse)同樣成立，而我們稍後會用到它。若 $\tan 2\phi = -1$，則 $2t = -(1 - t^2)$，即 $t^2 = 2t + 1$。所以

$$\tan^2\phi = 2\tan\phi + 1 \iff \tan 2\phi = -1.$$

方程 $\tan\theta = 2 + \tan 3\theta$

要成為解，$\tan\theta$ 和 $\tan 3\theta$ 都必須有定義。設 $t = \tan\theta$。那麼

$$\tan 3\theta = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2},$$

而且因為 $\tan 3\theta$ 有定義，所以 $1 - 3t^2 \neq 0$。因此

$$\tan\theta - \tan 3\theta = \frac{t(1 - 3t^2) - (3t - t^3)}{1 - 3t^2} = \frac{-2t - 2t^3}{1 - 3t^2}.$$

令上式等於 2，並把兩邊乘以 $1 - 3t^2$（它不等於零），得

$$-t - t^3 = 1 - 3t^2 \quad \Longleftrightarrow \quad t^3 - 3t^2 + t + 1 = 0.$$

各項係數之和為零，所以 $t = 1$ 是一個根，並且

$$t^3 - 3t^2 + t + 1 = (t - 1)(t^2 - 2t - 1).$$

$t = 1$ 和 $t = 1 \pm \sqrt{2}$ 都不滿足 $3t^2 = 1$，所以每一個根都給出真正的解。

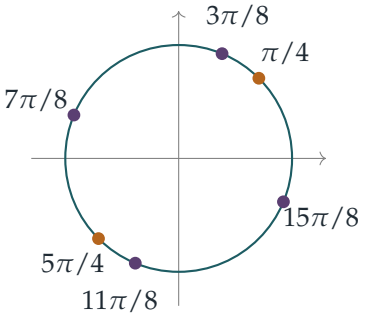
? **想一想** 怎樣把 $\tan\theta = 1 \pm \sqrt{2}$ 化為 π 的有理數倍？

我們利用第一部分。$t^2 - 2t - 1 = 0$ 的根正好就是滿足 $t^2 = 2t + 1$ 的 $\tan\theta$ 的值，而根據上面的等價關係（equivalence），這些正好就是滿足 $\tan 2\theta = -1$ 的 θ。

- $\tan\theta = 1$：$\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$。在 $(0, 2\pi)$ 內，這給出 $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$。
- $\tan 2\theta = -1$：$2\theta = \frac{3\pi}{4} + n\pi$，所以 $\theta = \frac{3\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$。這裏 2θ 的取值範圍是 $(0, 4\pi)$，所以 $n = 0, 1, 2, 3$，而 $\theta = \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$。

（例如 $\tan\frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$，而 $\tan\frac{7\pi}{8} = -\tan\frac{\pi}{8} = 1 - \sqrt{2}$。）所以在 $0 < \theta < 2\pi$ 內的解是

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}.$$



琥珀色的點來自 $\tan\theta = 1$；梅紫色的點彼此相隔四分之一圈，來自 $\tan 2\theta = -1$。

方程 $\cot\theta = 2 + \cot 3\theta$

> **想一想** 我們是否要用 cot 把整個計算重做一遍？

不必。設 $\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$。那麼 $\cot\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \tan\psi$。此外

$$\cot 3\theta = \cot\left(\frac{3\pi}{2} - 3\psi\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - 3\psi\right) = \tan 3\psi,$$

這裏用到 cot 的周期（period）為 π 這個事實。每一邊有定義，當且僅當對應的 tan 有定義。所以方程變成

$$\tan\psi = 2 + \tan 3\psi,$$

這就是前一個方程。範圍 $-\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 變成 $0 < \psi < 2\pi$，正好就是前面的範圍。所以 ψ 取上面求得的六個值，而由 $\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$ 得

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{7\pi}{8}, -\frac{11\pi}{8}.$$

驗算

- 當 $\theta = \frac{\pi}{4}$：$\tan 3\theta = \tan\frac{3\pi}{4} = -1$，而 $2 + (-1) = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$。當 $\theta = \frac{3\pi}{8}$：$\tan\frac{9\pi}{8} = \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$，而 $2 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2} = \tan\frac{3\pi}{8}$。
- t 的三次方程最多有三個根，而 tan 的周期為 π，所以在長度為 2π 的區間內，我們預期最多有 $3 \times 2 = 6$ 個解。我們找到了六個。
- 以數值方法，在 $(0, 2\pi)$ 上用細密的格點掃描 $\tan x - \tan 3x - 2$，發現（在遠離極點（pole）之處）只在 $x = \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{10\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$ 出現變號。對餘切方程作同樣的掃描，找到的正好就是上面列出的六個值。

常見錯誤

- 在 $\tan 2\theta = -1$ 這一步只取 $n = 0, 1$ 就停下來。由於 θ 的取值範圍是 $(0, 2\pi)$，2θ 的取值範圍就是 $(0, 4\pi)$，這樣會得到四個解，而不是兩個。
- 未經檢查就除以某個式子，因而漏掉根 $t = 1$；或者忘記了 $\frac{5\pi}{4}$。
- 在最後一部分從頭解起，並把範圍弄錯。這個代換把題目所給的區間恰好映射到 $(0, 2\pi)$ 上，而這絕非巧合。

STEP 之外

恆等式（identity）$\tan 3\theta = (3t - t^3)/(1 - 3t^2)$ 其實就是 $(1 + \mathrm{i}t)^3$ 的實部與虛部；一般而言，$\tan n\theta$ 是 $\tan\theta$ 的兩個多項式之比，可以從 $(1 + \mathrm{i}t)^n$ 直接讀出。這些多項式的根是 π 的有理數倍的正切值，這就是為甚麼它們的因式分解（factorisation），例如這裏的 $t^2 - 2t - 1$，會如此整齊。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）展示了倍角公式（multiple-angle formulae）如何從複數乘法的幾何中自然得出。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。