詳細解答

STEP II 1997，第 5 題

純數學 • 複指數映射

> **STEP II 1997，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q5

本題在 *Beyond STEP* 第 5.7 節作爲映射的複指數函數中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch05/complex-exponential.html

關鍵思路

這個關係式其實就是 $z = \mathrm{e}^{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^{w}$，只不過寫成了模—輻角形式（modulus–argument form）：u 決定 z 的模（modulus），v 決定它的輻角（argument）。一旦看出這一點，每一部分其實都是極坐標（polar coordinates）的問題。唯一要留神的是，輻角只能確定到相差 2π 的整數倍，所以這個映射是多對一（many-to-one）的；要得到一一對應（one-to-one correspondence），就必須把 u–v 平面裁成一條高度恰當的水平帶狀區域，並且小心決定哪些邊界要包括在內。

解答

當 $z = \mathrm{i}\,\mathrm{e}$ 時求 w

由於 $\mathrm{e}^{u} > 0$ 而 $|\cos v + \mathrm{i}\sin v| = 1$，這個關係式表示

$$|z| = \mathrm{e}^{u}, \qquad \arg z = v \pmod{2\pi}.$$

當 $z = \mathrm{i}\,\mathrm{e}$ 時，$|z| = \mathrm{e}$ 而 $\arg z = \frac{\pi}{2}$。所以 $\mathrm{e}^{u} = \mathrm{e}$，得 $u = 1$（實指數函數是一對一的）；又 $\cos v + \mathrm{i}\sin v = \mathrm{i}$，所以 $\cos v = 0$ 且 $\sin v = 1$，得 $v = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$。因此

$$w = 1 + \mathrm{i}\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

這樣的 w 有無窮多個，它們在垂直線 $u = 1$ 上每隔 2π 出現一個。

直線 $u =$ 常數 的像

在直線 $u = c$ 上，點 z 的模是 e^c，輻角是 v。當 v 取遍所有實數時，$\cos v + \mathrm{i}\sin v$ 會繞單位圓走（無窮多圈），所以 z 描出的軌跡是

$$\text{圓} x^2 + y^2 = \mathrm{e}^{2c}, \quad \text{圓心} O, \text{ 半徑} \mathrm{e}^c.$$

c 愈大，圓就愈大；$c = 0$ 給出單位圓；當 $c \to -\infty$ 時，這些圓向 O 收縮，但永遠不會到達該點，因為 $\mathrm{e}^c > 0$。

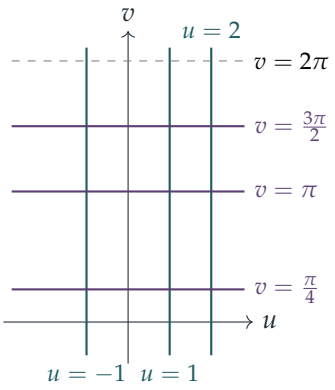
直線 $v =$ 常數 的像

在直線 $v = c$ 上，我們有 $z = \mathrm{e}^u(\cos c + \mathrm{i}\sin c)$，即固定的單位向量 $(\cos c, \sin c)$ 的正數倍。當 u 取遍 $\mathbb{R}$ 時，倍數 e^u 取 $(0, \infty)$ 中的每一個值恰好一次。所以它的像是

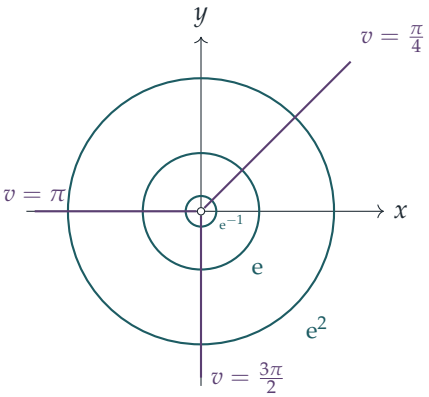
$$\text{由} O \text{ 出發、以角度} c \text{ 與正} x \text{ 軸相夾的半直線（half-line），但不包括} O \text{ 本身。}$$

直線 $v = c$ 與 $v = c + 2k\pi$ 給出同一條半直線。舉例說，用直角坐標表示時，$v = \frac{\pi}{4}$ 給出 $y = x$ 中 $x > 0$ 的部分，而 $v = \pi$ 給出負 x 軸。

下圖顯示 u–v 平面上由直線組成的網格及其像：垂直線變成圓，水平線變成射線。



u–v 平面



x–y 平面

（圖中的圓並非按比例繪畫：半徑 e^{-1}、e、e^2 增長得非常快。空心圓圈標示 O，這一點永遠不會到達。）

與第一象限一一對應的子集

點 z 位於開的第一象限（first quadrant），當且僅當 $z \neq 0$ 而且它有一個嚴格介乎 0 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間的輻角。取

$$W_1 = \left\{(u, v) : u \in \mathbb{R},\ 0 < v < \tfrac{\pi}{2}\right\}, \qquad W_2 = \left\{(u, v) : u \in \mathbb{R},\ 2\pi < v < \tfrac{5\pi}{2}\right\}.$$

W_1 的每一點都映射到第一象限內，因為在那裏 $e^u\cos v > 0$ 且 $e^u \sin v > 0$。反過來，對第一象限的一點 z，等式 $z = e^u(\cos v + i\sin v)$ 成立當且僅當 $u = \ln|z|$ 且 $v = \theta + 2k\pi$，其中 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 是它的主輻角（principal argument）。這些值之中恰好只有一個，即 $k = 0$ 的那個，落在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 內，所以 z 在 W_1 中恰有一個原像（preimage）。因此 W_1 與該象限一一對應。取 $k = 1$ 作同樣的論證，便適用於 W_2，它就是 W_1 向上平移 2π 而成。

（任何帶狀區域 $\{2k\pi < v < 2k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ 都同樣可行。）

與 $0 < |z| < 1$ 一一對應的子集

現在我們需要 $|z| = e^u < 1$，即 $u < 0$，而且每一個輻角都必須恰好取到一次，所以 v 必須取遍一個長度恰好是 2π 的區間。

> **想一想** 這條帶狀區域應該包括上邊界、下邊界、兩者都包括，還是兩者都不包括？

恰好包括其中一條。假如兩條都包括，例如 $0 \le v \le 2\pi$，那麼 $(u, 0)$ 和 $(u, 2\pi)$ 都會映射到正實軸上的同一點 e^u，這個對應就不是一對一的了。假如兩條都不包括，正實軸就完全取不到。只包括一條邊界，才能令每個輻角恰好出現一次。所以取

$$W_3 = \{(u,v) : u < 0,\ 0 \le v < 2\pi\}, \qquad W_4 = \{(u,v) : u < 0,\ -\pi < v \le \pi\}.$$

對於 W_3：若 $0 < |z| < 1$，則必然有 $u = \ln|z| < 0$，而在 z 的各個輻角 $\theta + 2k\pi$ 之中，恰好有一個落在 $[0, 2\pi)$ 內，因為這個區間的長度是 2π，而且只包含它的一個端點。所以每一個這樣的 z 在 W_3 中恰有一個原像，而 W_3 的每一點都映射到一個滿足 $0 < e^u < 1$ 的 z。對於 W_4，把區間換成 $(-\pi, \pi]$，同樣的論證依然成立，這個區間對應的正是主輻角。兩者都是把半平面 $u < 0$ 裁成高度為 2π 的半開帶狀區域。

驗算

- 代入 $u = 1$、$v = \frac{\pi}{2} + 2\pi$：$z = e(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}) = ie$，符合要求。
- 數值上，我們對數以千計的隨機 (u, v) 作檢驗，發現 $|z| = e^u$ 及 $\arg z \equiv v$ 的誤差都在 10^{-9} 之內。對每個目標集合中的隨機點，我們發現它在 $W_1, \ldots, W_4$ 中相應的集合內都恰有一個原像。此外，點 $(-1, 0)$ 和 $(-1, 2\pi)$ 都給出 $z = e^{-1} \approx 0.3679$，這證實了閉的帶狀區域會造成重複計算。

常見錯誤

- 只寫出 $w = 1 + \frac{\pi}{2}i$，忘記了 $+2k\pi$。

- 把原點算進像之中：e^u 永遠不等於 0，所以那些圓永遠不會縮成一點，而那些射線的起點是不包括在內的。
- 為 W_3 選用閉的帶狀區域 $0 \leq v \leq 2\pi$（或開的帶狀區域 $0 < v < 2\pi$）：前者把正實軸重複計算，後者則漏掉了它。

STEP 之外

這裏的映射就是複指數函數（complex exponential）$w \mapsto e^w$。它把直角坐標的網格線變成極坐標的網格線，而且是周期函數，周期為 $2\pi i$。選擇一條令它成為一對一的帶狀區域，正正就是為它的反函數選擇一個*複對數的分支*（*branch of the complex logarithm*）。你捨去的那條邊界就是*分支切割*（*branch cut*），這解釋了為甚麼 $\log z$ 不能在整個 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上連續地定義。Tristan Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以圖像闡釋複分析的著作）對這個映射以及一般的保角映射（conformal maps）都有十分精美的圖示。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。