詳細解答

STEP II 1997，第 4 題

純數學 • 餘式定理

> **STEP II 1997，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q4

關鍵思路

以一個次數（degree）為 d 的多項式作除式，所得餘式（remainder）的次數必小於 d，而且恆等式（identity）被除式 = 除式 × 商式 + 餘式 對每一個 x 都成立。因此，我們代入令除式變為零的 x 值：商式（quotient）那一項隨即消失，只剩下餘式。整道題目用的就是這一招，前後共用了三次。

解答

餘式定理（remainder theorem）

把 $\mathrm{p}(x)$ 除以一次多項式 $x-a$，得到商式 $\mathrm{s}(x)$ 和餘式 R，而餘式的次數小於 1，所以 R 是常數：

$$\mathrm{p}(x) = (x-a)\,\mathrm{s}(x) + R \qquad \text{對所有} x.$$

由於這是關於 x 的恆等式，我們可以代入 $x = a$。右邊第一項變成 $0 \cdot \mathrm{s}(a) = 0$，於是剩下 $\mathrm{p}(a) = R$。所以餘式就是 $\mathrm{p}(a)$，正如所求。

第 (i) 部分

根據餘式定理，題目給出的餘式表示

$$\mathrm{p}(1) = 3, \qquad \mathrm{p}(2) = 1, \qquad \mathrm{p}(3) = 5.$$

把 $x = 1, 2, 3$ 代入 $\mathrm{p}(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\mathrm{q}(x) + \mathrm{r}(x)$，每次第一項都會變成零，所以

$$\mathrm{r}(1) = 3, \qquad \mathrm{r}(2) = 1, \qquad \mathrm{r}(3) = 5.$$

想一想 我們對 $\mathrm{q}(x)$ 一無所知。這會構成問題嗎？

不會：當 $x = 1, 2, 3$ 時，因式 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 等於零，所以無論 q 是甚麼，它都沒有任何貢獻。三個函數值足以確定 r，因為它最多只有三個係數。

次數不超過二的多項式，可以方便地寫成

$$\mathrm{r}(x) = A(x-1)(x-2) + B(x-1) + C,$$

因為這樣每次代入都會逐一消去某些項：

$$\begin{aligned} x = 1: &\quad C = 3, \\ x = 2: &\quad B + C = 1 \;\Rightarrow\; B = -2, \\ x = 3: &\quad 2A + 2B + C = 5 \;\Rightarrow\; 2A - 4 + 3 = 5 \;\Rightarrow\; A = 3. \end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{r}(x) = 3(x-1)(x-2) - 2(x-1) + 3 = 3x^2 - 11x + 11.$$

驗算：$\mathrm{r}(1) = 3 - 11 + 11 = 3$，$\mathrm{r}(2) = 12 - 22 + 11 = 1$，$\mathrm{r}(3) = 27 - 33 + 11 = 5$。

第 (ii) 部分

（題目有一處寫作 $\mathrm{P}_n(x)$；它指的是同一個多項式 $\mathrm{P}(x)$。）根據餘式定理，我們需要

$$\mathrm{P}(a) = a \qquad \text{其中} a = 0, 1, \ldots, n.$$

多項式 x 本身已經符合這個要求，但它的次數不對。所以我們改為考慮 $\mathrm{D}(x) = \mathrm{P}(x) - x$：我們需要 $\mathrm{D}(a) = 0$ 對 $a = 0, 1, \ldots, n$ 成立，於是根據因式定理（factor theorem，即餘式為 0 時的餘式定理），$x, x-1, \ldots, x-n$ 各自都整除 $\mathrm{D}(x)$。這 $n+1$ 個一次因式互不相同，所以它們的乘積整除 $\mathrm{D}(x)$，而這個乘積的次數是 $n+1$。

想一想 怎樣才能令 $\mathrm{P}(x)$ 的次數剛好是 $n+1$？

取 $\mathrm{D}(x)$ 為該乘積本身（喜歡的話也可以乘上一個非零常數）。加上 x 不可能抵銷它的首項（leading term）x^{n+1}，因為 $n+1 \geq 2$。所以

$$\mathrm{P}(x) = x + x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

的次數是 $n+1$，並且 $\mathrm{P}(a) = a + 0 = a$ 對每個滿足 $0 \leq a \leq n$ 的整數 a 都成立。這就是一個符合要求的多項式。

事實上，這個論證找出了所有這樣的多項式：如果 P 的次數是 $n+1$，並且有題目所述的餘式，那麼 $\mathrm{D}(x) = \mathrm{P}(x) - x$ 的次數最多是 $n+1$，又能被那個次數為 $n+1$ 的乘積整

除，所以 $\mathrm{D}(x) = k\,x(x-1)\cdots(x-n)$，其中 k 是常數，而且必須有 $k \neq 0$，次數才會是 $n+1$。一般的答案是

$$\mathrm{P}(x) = x + k\,x(x-1)(x-2)\cdots(x-n), \qquad k \neq 0.$$

驗算

- 當 $n = 1$ 時，$\mathrm{P}(x) = x + x(x-1) = x^2$：除以 x 餘 0，除以 $x-1$ 餘 1，符合要求。
- 在 (i) 中，任取一個 q，例如 $\mathrm{q}(x) = x$，構作出 p，再用綜合除法（synthetic division）分別除以 $x-1$、$x-2$、$x-3$：所得餘式正是 $3, 1, 5$。
- 我們用電腦驗證了以下各項：以 1000 個隨機多項式檢驗餘式定理；第 (i) 部分取 100 個隨機選擇的 q；第 (ii) 部分取 $n = 1, \ldots, 11$ 及 $k = 1, -3, 7$。每一個餘式都完全吻合。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分，忘記了多項式 $\mathrm{P}(x) = x$ 本身雖然滿足各項條件，但次數是 1 而不是 $n+1$；正是那個乘積項把次數修正過來。
- 就 $ax^2 + bx + c$ 的係數解三條聯立方程並無不妥，只是較慢；採用嵌套形式 $A(x-1)(x-2) + B(x-1) + C$ 則可免去消元的步驟。

STEP 之外

第 (i) 部分是多項式插值（polynomial interpolation）的一個例子：通過任意 m 個 x 坐標互不相同的點，恰好有一個次數小於 m 的多項式，而我們所用的嵌套形式就是它的牛頓（Newton）形式。同樣的推理，用環（ring）的語言來說，就是多項式的中國餘數定理（Chinese remainder theorem）：知道一個多項式模 $x-1$、$x-2$ 和 $x-3$ 的結果，等同於知道它模這三者乘積的結果。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）詳細講述了多項式環和這個定理。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。