詳細解答

STEP II 1997，第 3 題

純數學 • 部分分式積分法

STEP II 1997，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s2-q3

關鍵思路

分母中的兩個二次式相乘得 x^4+4。這是經典的「喬裝了的平方差」（difference of two squares）：$x^4+4=(x^2+2)^2-(2x)^2$。一旦求得部分分式（partial fractions），每一項都是標準積分。我們把每個分子拆成兩部分：一部分是其分母的導數（derivative）的倍數，積分後得對數（logarithm）；另一部分是常數，配方（completing the square）後得反正切（arctangent）。

解答

部分分式

首先留意

$$(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=(x^2+2)^2-(2x)^2=x^4+4x^2+4-4x^2=x^4+4.$$

因此，把所求的恆等式兩邊同乘 x^4+4，我們需要

$$(ax+b)(x^2-2x+2)+(cx+d)(x^2+2x+2)=1 \quad \text{對所有} x.$$

展開左方得

$$(a+c)x^3+(b-2a+d+2c)x^2+(2a-2b+2c+2d)x+(2b+2d).$$

與常數多項式 1 比較係數（comparing coefficients）：

$$\begin{aligned} x^3: &\quad a+c=0,\\ x^2: &\quad b+d-2a+2c=0,\\ x^1: &\quad 2(a+c)+2(d-b)=0,\\ x^0: &\quad 2(b+d)=1. \end{aligned}$$

由第一及第三條方程得 $c=-a$ 及 $d=b$。再由第四條方程得 $b=d=\frac{1}{4}$。最後，第二條方程變成 $\frac{1}{2}-4a=0$，所以 $a=\frac{1}{8}$。因此

$$a=\tfrac{1}{8}, \qquad b=\tfrac{1}{4}, \qquad c=-\tfrac{1}{8}, \qquad d=\tfrac{1}{4},$$

即

$$\frac{1}{x^4+4}=\frac{1}{8}\left(\frac{x+2}{x^2+2x+2}+\frac{2-x}{x^2-2x+2}\right).$$

（其實我們毋須任何代數運算，也可預料 $c=-a$ 及 $d=b$。以 $-x$ 代替 x，$\frac{1}{x^4+4}$ 保持不變，而兩個分母則互相對調。）

積分

想一想 我們怎樣求 $\dfrac{x+2}{x^2+2x+2}$ 的積分？

分母的導數是 $2x+2$。於是我們把分子寫成 $2x+2$ 的倍數，再加上餘下的部分：

$$x+2=\tfrac{1}{2}(2x+2)+1, \qquad 2-x=-\tfrac{1}{2}(2x-2)+1.$$

配方得 $x^2\pm 2x+2=(x\pm 1)^2+1$。因此

$$\frac{1}{x^4+4}=\frac{1}{16}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{16}\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2+1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x-1)^2+1}.$$

兩個二次式對所有實數 x 均為正數，所以每一項在 $[0,1]$ 上都是連續的。首兩項的形式為 f'/f，其中 $f>0$，積分後得 $\ln f$。最後兩項積分後得反正切。所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^4+4} &= \frac{1}{16}\Big[\ln(x^2+2x+2)-\ln(x^2-2x+2)\Big]_0^1+\frac{1}{8}\Big[\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1)\Big]_0^1\\ &= \frac{1}{16}[(\ln 5-\ln 1)-(\ln 2-\ln 2)]\\ &\quad +\frac{1}{8}[(\tan^{-1}2+\tan^{-1}0)-(\tan^{-1}1+\tan^{-1}(-1))]\\ &= \frac{1}{16}\ln 5+\frac{1}{8}[\tan^{-1}2-(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{\pi}{4})]\\ &= \frac{1}{16}\ln 5+\frac{1}{8}\tan^{-1}2, \end{aligned}$$

正如所求。各個 $\ln 2$ 項和各個 $\frac{\pi}{4}$ 項都成對抵消，這正是上文留意到的對稱性所帶來的美妙結果。

驗算

- 當 $x = 0$ 時，部分分式給出 $\frac{1}{8}\left(\frac{2}{2} + \frac{2}{2}\right) = \frac{1}{4} = \frac{1}{0+4}$。當 $x = 1$ 時，則給出 $\frac{1}{8}\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{1}\right) = \frac{1}{5}$，同樣正確。
- 被積函數（integrand）在 $[0,1]$ 上由 $\frac{1}{4}$ 遞減至 $\frac{1}{5}$，所以積分值必定介乎 0.2 與 0.25 之間。以數值計算，$\frac{1}{16}\ln 5 + \frac{1}{8}\tan^{-1} 2 \approx 0.100589 + 0.138394 = 0.238983$。對該積分使用辛普森法則（Simpson's rule）得 0.2389834593，兩者吻合至約 16 位有效數字。

常見錯誤

- 試圖尋找實根，藉此在實數範圍內把 $x^4 + 4$ 因式分解（factorise）。它並沒有實根，所以因式必定是二次式。竅門在於加上再減去 $4x^2$ 來配方。
- 忘記反正切項的下限。$\tan^{-1}(0+1) = \frac{\pi}{4}$ 與 $\tan^{-1}(0-1) = -\frac{\pi}{4}$ 必須兩者都計算在內，才會互相抵消。

STEP 之外

因式分解 $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$ 是熱爾曼（Sophie Germain）恆等式 $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$ 的特例。舉例說，它說明了 $n^4 + 4$ 只有在 $n = 1$ 時才是質數。更一般而言，每個實係數多項式都可分解成實係數的一次因式和二次因式，因為複數根總是以共軛對（conjugate pairs）的形式出現。所以，只要懂得部分分式，從而懂得對數和反正切，便足以求出任何有理函數（rational function）的積分。利用圍道積分（contour integration），你幾乎毋須計算便可求得 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+4} = \frac{\pi}{4}$；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）解釋了箇中原因。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。