詳細解答

STEP II 1997，第 2 題

純數學 • 遞推關係

> **STEP II 1997，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q2

關鍵思路

這一串等式其實是喬裝了的遞推關係（recurrence）：每一環都在說 $x_n + 2/x_{n+1} = 3$，所以每一項都決定了下一項。先把頭幾項以分數形式算出來，再仔細觀察分子和分母。2 的冪很快就會出現；一旦有了猜想，遞推關係正好提供歸納法（induction）所需的那一步。

解答

找出規律

把這串等式逐個讀出來，得

$$\frac{2}{x_1} = 3 \qquad \text{及} \qquad x_n + \frac{2}{x_{n+1}} = 3 \quad (n \geq 1),$$

因此

$$x_1 = \frac{2}{3}, \qquad x_{n+1} = \frac{2}{3 - x_n}.$$

（這個遞推關係只在 $x_n \neq 3$ 時才有意義；我們稍後會看到，每個 x_n 都介乎 0 與 1 之間。）算出頭幾項：

$$x_1 = \frac{2}{3}, \qquad x_2 = \frac{2}{3 - \frac{2}{3}} = \frac{6}{7}, \qquad x_3 = \frac{2}{3 - \frac{6}{7}} = \frac{14}{15}, \qquad x_4 = \frac{2}{3 - \frac{14}{15}} = \frac{30}{31}.$$

分母 $3, 7, 15, 31$ 各自都比 2 的某個冪少一，即 $2^{n+1} - 1$，而每個分子又比它的分母少一。於是我們猜想

$$x_n = \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1}.$$

以歸納法證明

設 $P(n)$ 為命題 $x_n = \dfrac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$。

基礎情況（base case）。當 $n = 1$ 時，公式給出 $\frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3} = x_1$，所以 $P(1)$ 成立。

歸納步驟（inductive step）。假設對某個 $k \geq 1$，$P(k)$ 成立。為了令代數運算整潔一些，記 $N = 2^{k+1}$，於是 $x_k = \dfrac{N-2}{N-1}$。那麼

$$3 - x_k = \frac{3(N-1)-(N-2)}{N-1} = \frac{2N-1}{N-1},$$

它不等於零（事實上它大於 2，因為 $x_k < 1$），所以我們可以除以它：

$$x_{k+1} = \frac{2}{3-x_k} = \frac{2(N-1)}{2N-1} = \frac{2N-2}{2N-1}.$$

> ? **想一想** 為甚麼這就是 $n = k+1$ 時的公式？

因為 $2N = 2^{k+2} = 2^{(k+1)+1}$。所以

$$x_{k+1} = \frac{2^{(k+1)+1}-2}{2^{(k+1)+1}-1},$$

這正是 $P(k+1)$。

由於 $P(1)$ 成立，而且對每個 $k \geq 1$ 都有 $P(k) \Rightarrow P(k+1)$，根據歸納法，$P(n)$ 對所有 $n \geq 1$ 都成立。這同時確認了對每個 n 都有 $0 < x_n < 1$，所以分母 $3 - x_n$ 永遠不會是零。

「其他方法」：線性化

這個猜想其實也可以推導出來。對於形如 $x_{n+1} = 2/(3 - x_n)$ 的遞推關係，只要引入一個各項均非零的新數列 (a_n)，並寫成 $x_n = 2a_n/a_{n+1}$，它就會變成線性（linear）的。代入後得

$$\frac{2a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{2}{3 - \frac{2a_n}{a_{n+1}}} = \frac{2a_{n+1}}{3a_{n+1} - 2a_n}, \qquad \text{所以} \qquad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n.$$

輔助方程（auxiliary equation）$t^2 - 3t + 2 = 0$ 的根是 1 和 2，所以 $a_n = A + B \cdot 2^n$。取 $a_1 = 1$（我們可以隨意按比例縮放 a）及 $a_2 = 3$（使得 $x_1 = 2a_1/a_2 = \frac{2}{3}$），便得 $a_n = 2^n - 1$，從而 $x_n = \dfrac{2(2^n-1)}{2^{n+1}-1}$，與之前的公式相同。

驗算

- 在公式中取 $n = 0$，得 $x_0 = 0$；而第一條等式 $3 = 2/x_1$ 確實就是一般的那一環 $x_0 + 2/x_1 = 3$ 在 $x_0 = 0$ 時的情況。這是一個漂亮的一致性檢查。
- 當 $n \to \infty$ 時，$x_n \to 1$。遞推關係的極限（limit）L 必須滿足 $L = 2/(3 - L)$，即 $L^2 - 3L + 2 = 0$，所以 $L = 1$ 或 $L = 2$，而我們的數列從下方趨近的正是 1。
- 由 $x_1 = \frac{2}{3}$ 出發，以精確分數反覆計算 $x_{n+1} = 2/(3 - x_n)$，結果對每個不超過 40 的 n 都與公式吻合；例如 $x_5 = \frac{62}{63}$。

常見錯誤

- 讀錯那串等式：方程是 $x_n + 2/x_{n+1} = 3$，而不是 $x_{n+1} + 2/x_n = 3$。弄錯了就會得到另一個數列。
- 寫到「規律如此類推」就停筆。題目要求的是證明，而幾項數值只算是佐證。
- 在歸納步驟中，忘記把 $2 \cdot 2^{k+1}$ 改寫成 $2^{(k+1)+1}$，以致結論始終沒有明確顯示為命題 $P(k+1)$。

STEP 之外

形如 $x_{n+1} = (ax_n + b)/(cx_n + d)$ 的遞推關係，就是對一個莫比烏斯變換（Möbius transformation）作迭代（iteration），而且總可以像「其他方法」那樣線性化。等價地，我們可以追蹤 2×2 矩陣 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的冪，它的特徵值（eigenvalues，這裏是 1 和 2）支配着長遠的變化。不動點（fixed points）1 和 2 分別是吸引的（attracting）和排斥的（repelling），這就是數列最終穩定於 1 的原因。關於矩陣的觀點，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）；至於數列收斂的一般理論，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（數學分析入門）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。