詳細解答

STEP II 1997，第 14 題

概率與統計 • 泊松過程

> **STEP II 1997，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q14

關鍵思路

雖然題目以力學為背景，這其實是一道泊松過程(Poisson process)的題目。運動學(kinematics）只是告訴我們哪些車輛要計算在內：一輛較快的車要在隧道內追上我，它進入隧道的時間必須在我之後某段時間之內。一旦知道這個時限，餘下的一切都變成關於泊松計數的問題。在後半部分，我們會用到以下事實：若把泊松車流中的每輛車隨機標記為快車或慢車，車流便會分拆成兩個獨立（independent）的泊松車流。我們還需要留意，一輛慢車會替我擋住它後面的所有快車。

解答

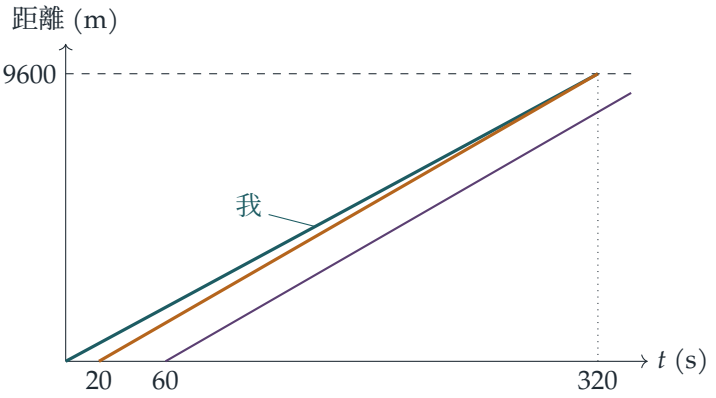
全題把車輛視為質點（particle）（不計車身長度），所以一輛車追上前車之後，便會一直以前車的速率行駛。以秒為單位量度時間 t，由我進入隧道的一刻起計。車輛以每分鐘 6 輛的率進入，即每秒 0.1 輛，所以在任何長度為 τ 秒的時段內進入的車輛數目服從 $\mathrm{Po}(0.1\tau)$，而且互不相交的時段內的數目互相獨立。

第一部分：誰能追上我？

我通過隧道需時 $9600/30 = 320\,\mathrm{s}$。考慮一輛以 $32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 行駛、在時間 $t > 0$ 進入的車輛。在它追上我之前，於時間 s 我已駛入隧道 $30s$，而它則駛入了 $32(s-t)$。兩者在 $2s = 32t$ 時相等，即 $s = 16t$，此時距離隧道入口 $480t$ 米。所以它在我離開之前追上我，當且僅當

$$480t \le 9600 \iff t \le 20.$$

（等價地說：它通過隧道需時 $9600/32 = 300\,\mathrm{s}$，所以它不遲於我到達出口，當且僅當 $t + 300 \le 320$。）



這幅距離－時間圖顯示了我（藍綠色）、一輛在 $t = 20$ 進入的快車（琥珀色）和一輛在 $t = 60$ 進入的快車（紫紅色）。琥珀色的車剛好在我們同時到達出口的一刻追上我；任何更遲進入的快車，例如紫紅色那一輛，在我離開時仍然在我後面。

其他車輛全部以 $32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 行駛，所以在 $(0, 20]$ 內進入的車輛在到達我身後之前，不會被任何東西阻慢：除我以外，在它前面的任何車輛同樣以 $32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 行駛，直至那輛車也追上我為止。比我先進入的車輛在我前面，與問題無關。所以我離開時身後的車龍，正好由在 $(0, 20]$ 內進入的車輛組成，其數目服從 $\mathrm{Po}(0.1 \times 20) = \mathrm{Po}(2)$。我身後車龍中車輛數目的期望值（expected value）是

$$\boxed{2}.$$

第二部分：恰好有兩輛車進入並追上我

現在其他每輛車各有 $\frac{1}{2}$ 的概率是快車（$32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$）或慢車（$30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$），並且與其他一切獨立。

想一想 在 20 秒內進入的每一輛快車，是否仍然都能追上我？

不是。一輛在時間 $t' > 0$ 進入的慢車，會一直與我保持 $30t'$ 米的固定距離，所以它永遠追不上我。在它之後進入的快車會追上這輛慢車（或被慢車後面的其他車輛擋住），此後只能以 $30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 行駛，所以它同樣永遠到不了我身後。因此，一輛在 $(0, 20]$ 內進入的車輛能追上我，當且僅當它是快車，*而且*在我與它之間進入的每一輛車都是快車。在 $t = 20$ 之後進入的快車，即使前面毫無阻擋，也追不上我。

設 $K \sim \mathrm{Po}(2)$ 為在 $(0, 20]$ 內進入的車輛數目。這一部分所求的事件，是恰好有兩輛車在該時段內進入，而且兩輛都追上我。這需要 $K = 2$ 且兩輛車都是快車：

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}(K = 2) \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{2^2 \mathrm{e}^{-2}}{2!} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}} \approx 0.0677.$$

最後部分：恰好有兩輛車在我身後排隊

現在，頭 20 秒內進入的車輛數目可以是任意的。把在 $(0,20]$ 內進入的 K 輛車按進入的先後次序排列。根據上面的論證，我在出口時身後的車龍，就是這個列表開首那一串連續不斷的快車。（在 $t=20$ 之後進入的車輛不可能加入車龍，因為它永遠追不上我。）所以車龍中恰好有兩輛車，當且僅當

- $K=2$ 且兩輛都是快車：已知 $K=2$ 時，概率為 $\frac{1}{4}$；或
- $K\geq 3$，且頭兩輛是快車、第三輛是慢車：已知 $K=k\geq 3$ 時，概率為 $\frac{1}{8}$。

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{車龍有兩輛車}) &= \tfrac{1}{4}\,\mathrm{P}(K=2)+\tfrac{1}{8}\,\mathrm{P}(K\geq 3)\\ &= \tfrac{1}{4}\cdot 2\mathrm{e}^{-2}+\tfrac{1}{8}\left(1-\mathrm{e}^{-2}-2\mathrm{e}^{-2}-2\mathrm{e}^{-2}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}+\tfrac{1}{8}-\tfrac{5}{8}\mathrm{e}^{-2}\\ &= \boxed{\tfrac{1}{8}\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right)}\approx 0.108.\end{aligned}$$

這個答案比上一個大，而這是必然的：上一個事件只是出現兩輛車車龍的其中一種情況。

> 一個巧妙的另解：把車流分拆成快車和慢車，得到兩個獨立的泊松過程，各自的率為 $0.05\,\mathrm{s}^{-1}$。車龍恰好有兩輛車，意思是在頭 20 秒內，最先到達的兩輛是快車，而下一輛到達的車（如果有的話）是慢車。遇到事件帶有標記的泊松題目時，從這兩個車流的角度去想，往往是最快捷的途徑。

驗算

- 極限情況：假如每輛車都是慢車，便沒有車能追上我；果然，當快車的概率為 0 時，車龍的公式給出 0。
- 若快車的概率是 p 而不是 $\frac{1}{2}$，同樣的論證給出 $p^2\mathrm{P}(K=2)+p^2(1-p)\mathrm{P}(K\geq 3)$。當 $p=1$ 時，這等於 $\mathrm{P}(K=2)=2\mathrm{e}^{-2}$，與第一部分吻合，因為那裏的車龍長度正好服從 $\mathrm{Po}(2)$。
- 我們對不准超車的交通情況模擬了 4×10^5 次。結果是第一部分的平均車龍長度為 2.003，第二部分的兩個概率為 0.0674 和 0.1076，而準確值則是 0.0677 和 0.1081。

常見錯誤

- 忘記了一輛慢車會替我擋住它後面的所有快車，於是在最後部分答 $\mathrm{P}(20\text{ s 內恰好有兩輛快車}) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$。
- 把每分鐘 6 輛的率與以秒計的時間一併使用：20 秒內的平均數是 2，不是 120。
- 以為任何時間進入的車輛都會令車龍增長：只有在頭 20 秒內進入的車輛才能到達我身後。

STEP 之外

第二部分用到稀疏化（thinning）：若率為 λ 的泊松過程中，每個事件各自獨立地以概率 p 被保留，則被保留和被捨棄的事件分別構成率為 $p\lambda$ 和 $(1-p)\lambda$ 的兩個獨立泊松過程。不能超車的車龍是交通流理論（traffic flow theory）中的經典模型，其中慢車會造成我們在這裏見到的那種「車隊」（platoon）。關於泊松過程和稀疏化，可參閱 Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。