詳細解答

STEP II 1997，第 13 題

概率與統計 • 布豐投針問題

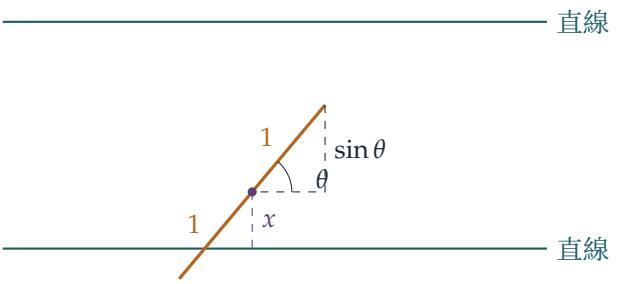
> **STEP II 1997，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q13

關鍵思路

這是布豐投針問題（Buffon's needle）。用兩個獨立（independent）的隨機量來描述針的位置：針的中心與最近一條直線的距離，以及針與直線所成的銳角。中心一旦固定，一切就取決於針在垂直於直線的方向上伸展多遠，也就是針的半長乘以該角的正弦。於是每一部分都化為關於一個均勻分佈（uniformly distributed）的角的問題。

解答

我們按慣常的方式為「隨機投下」建立模型：中心與最近一條直線的距離 X 在 $[0,1]$ 上均勻分佈（直線相距 2 cm，所以最近的一條至多相距 1 cm），而針與直線所成的銳角 θ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上均勻分佈，且與 X 獨立。（若取角在 $[0,\pi)$ 上均勻分佈，答案也一樣，因為兩種取法下 $\sin\theta$ 的分佈相同。）



針的每一半長度為 1，所以兩端分別在中心的上方和下方，垂直距離為 $\sin\theta$。

第 (i) 部分

設中心與最近一條直線相距 x，則針與該直線相交，當且僅當其中一端越過該直線，即

$$\sin\theta > x \iff \theta > \arcsin x,$$

因為 sin 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上遞增。由於 θ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上均勻分佈，

$$\mathrm{P}(\text{與最近的直線相交} \mid X = x) = \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin x = \frac{2}{\pi}\arccos x.$$

第 (ii) 部分

假設針與最近的直線相交，即 $\theta > \arcsin x$。沿着針量度，交點與中心相距 $x/\sin\theta$（這是一個直角三角形的斜邊，其中 θ 的對邊為 x）。所以兩段的長度分別為 $1 + x/\sin\theta$ 和 $1 - x/\sin\theta$，較短的一段是

$$S = 1 - \frac{x}{\sin\theta}.$$

當 θ 由 $\arcsin x$ 變到 $\frac{\pi}{2}$ 時，S 由 0 遞增至 $1 - x$，所以 S 在 $[0, 1 - x]$ 內取值。

在相交的條件下，θ 在 $(\arcsin x, \frac{\pi}{2}]$ 上均勻分佈，這個區間的長度為 $\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arccos x$。對於 $0 \le s \le 1 - x$，

$$S \le s \iff \frac{x}{\sin\theta} \ge 1 - s \iff \sin\theta \le \frac{x}{1-s} \iff \theta \le \arcsin\frac{x}{1-s},$$

這裏用到了 $1 - s > 0$ 和 $x/(1-s) \le 1$（因為 $s \le 1 - x$），所以反正弦有意義。因此較短一段的累積分佈函數（cumulative distribution function）為

$$F(s) = \mathrm{P}(S \le s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ \dfrac{\arcsin(\frac{x}{1-s}) - \arcsin x}{\arccos x}, & 0 \le s \le 1 - x, \\ 1, & s > 1 - x. \end{cases}$$

作為合理性檢查，中間的公式在 $s = 0$ 時給出 0，在 $s = 1 - x$ 時給出 $(\frac{\pi}{2} - \arcsin x)/\arccos x = 1$，所以 F 是連續的。

想一想 為甚麼得知針與直線相交之後，θ 仍然是均勻分佈的？

把一個均勻分佈的變量限制在某個子區間內（即以它落在該子區間為條件），它在該子區間上仍然是均勻分佈的：對於 $\arcsin x \le a \le \frac{\pi}{2}$，$\mathrm{P}(\theta \le a \mid \theta > \arcsin x) = (a - \arcsin x)/(\frac{\pi}{2} - \arcsin x)$，這是 a 的線性函數。這正是我們所用到的。

第 (iii) 部分

最近的直線相距 $X \le 1$，而其他每一條直線都相距至少 $2 - X \ge 1$。針從中心最多伸展 $\sin\theta \le 1$，所以它要與最近那條以外的直線相交，只可能在 $X = 1$ 且 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 恰好成立的情況下發生，而這個情況的概率為零。所以針不碰到任何直線，當且僅當它不碰到最近的直線，於是由第 (i) 部分得

$$\mathrm{P}(\text{不相交} \mid X = x) = \frac{2}{\pi}\arcsin x.$$

由於 X 在 $[0,1]$ 上均勻分佈（密度為 1），我們對 x 取平均：

$$\mathrm{P}(\text{不相交}) = \int_0^1 \frac{2}{\pi}\arcsin x \,\mathrm{d}x.$$

用分部積分法（integration by parts），取 $u = \arcsin x$ 及 $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arcsin x \,\mathrm{d}x &= \Big[x\arcsin x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} - \Big[-\sqrt{1-x^2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{P}(\text{針不碰到任何直線}) = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2} - 1\Big) = 1 - \frac{2}{\pi} \approx 0.363.$$

驗算

- 第 (i) 部分在兩端的表現合理：當 $x = 0$ 時，中心在直線上，概率為 1；當 $x \to 1$ 時，只有垂直於直線的針才碰得到，概率趨向 0。
- 相交的概率為 $2/\pi \approx 0.637$，即布豐的經典答案 $2\ell/(\pi d)$，其中 $\ell = d = 2$。
- 模擬 10^6 次隨機投針，得出的不相交比率為 0.3626，而 $1 - 2/\pi = 0.3634$；對 $x = 0.2, 0.5, 0.7$ 模擬所得的 $F(s)$ 值與公式相符，誤差約為 0.002。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分忘記取條件：除以 $\frac{\pi}{2}$ 而不是 $\arccos x$，會得出一個永遠達不到 1 的「分佈函數」。
- 把較短的一段取為 $1 - x\sin\theta$ 或 $1 - x/\cos\theta$：要查清楚三角形的哪一條邊是 x，哪一個角是 θ。
- 在第 (iii) 部分乘以 $\frac{1}{2}$，或取 X 在 $[0,2]$ 上均勻分佈而沒有相應調整相交的條件；與最近直線的距離是在 $[0,1]$ 上均勻分佈的。

STEP 之外

布豐投針問題（1777 年）是幾何概率（geometric probability）中最早的問題之一，而 π 的出現意味着投針可以給出 π 的一個（緩慢的）蒙地卡羅（Monte Carlo）估計。最簡潔的現代處理方法利用期望值的線性性質（linearity of expectation）：相交次數的期望值與針的長度成正比，即使針是彎曲的也一樣（「布豐麵條」，Buffon's noodle），由此可通往積分幾何（integral geometry）和克羅夫頓公式（Crofton formula）。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率入門教材）討論了聯合分佈（joint distribution）和這一類幾何概率問題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。