詳細解答

# STEP II 1997，第 11 題

力學 • 拋體運動

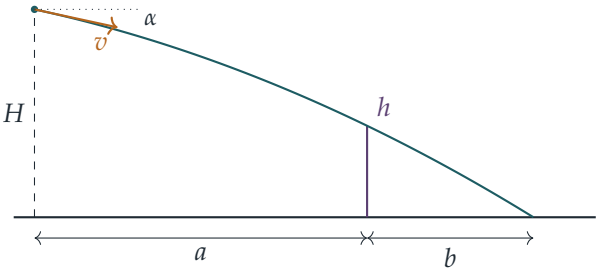
> **STEP II 1997，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q11

## 關鍵思路

先把軌跡（trajectory）寫成一條方程，以水平移動距離表示球比發球者擊球高度下降了多少。這樣，題目給出的兩項事實（球水平移動了 $a$ 時高度為 $h$，水平移動了 $a+b$ 時高度為 0）就是關於兩個未知數 $v$ 和 $\alpha$ 的兩條方程。至於上下界，則來自這個問題：這兩條方程的解在甚麼時候才真正具有物理意義？

## 解答

我們把球看成只受重力作用的質點（particle），即不考慮空氣阻力（air resistance）和旋轉。取擊球點正下方的地面為原點，$x$ 軸沿水平方向指向球網，$y$ 軸鉛垂向上。




### $v^2$ 的公式

初速度為 $(v\cos\alpha, -v\sin\alpha)$。經過時間 $t$ 後，

$$x = vt\cos\alpha, \qquad y = H - vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

以 $t = x/(v\cos\alpha)$ 消去時間，並利用 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$，得

$$y = H - x\tan\alpha - \frac{gx^2(1+\tan^2\alpha)}{2v^2}. \qquad (*)$$

為方便起見，記 $T = \tan\alpha$ 及 $k = \dfrac{g(1+T^2)}{2v^2}$，於是 $y = H - xT - kx^2$。

球在 $x = a + b$ 處着地，所以在該處代入 $y = 0$：

$$0 = H - (a+b)T - k(a+b)^2 \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{H-(a+b)T}{(a+b)^2}. \qquad (1)$$

把 $k$ 換回它的定義，再整理成 $v^2$ 的表達式，得

$$v^2 = \frac{g(a+b)^2(1+\tan^2\alpha)}{2[H-(a+b)\tan\alpha]},$$

這就是第一個結果。

### $\tan\alpha$ 的公式

球剛好越過球網，所以在 $x = a$ 處 $y = h$。由 $(*)$ 得

$$H - h = aT + ka^2.$$

代入 (1) 中的 $k$，並將全式乘以 $(a+b)^2$：

$$\begin{aligned}(H-h)(a+b)^2 &= aT(a+b)^2 + a^2\big[H-(a+b)T\big]\\ &= aT(a+b)\big[(a+b)-a\big] + a^2H\\ &= abT(a+b) + a^2H.\end{aligned}$$

把含 $H$ 的項合併，並利用 $(a+b)^2 - a^2 = b(2a+b)$，得

$$ab(a+b)T = b(2a+b)H - (a+b)^2h.$$

兩邊除以 $ab(a+b)$（此數為正），得

$$\tan\alpha = \frac{2a+b}{a(a+b)}H - \frac{a+b}{ab}h,$$

正是所求。

### $H$ 的範圍

給定 $a$、$b$、$h$ 和 $H$ 後，第二條公式決定了 $\tan\alpha$，然後第一條公式決定了 $v^2$。當且僅當這些值都合理時，這樣的發球才存在：即 $\tan\alpha > 0$（球是向下擊出的，所以 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$）以及 $v^2 > 0$。

**想一想** $v^2$ 的分子顯然是正數。那麼 $v^2 > 0$ 實際上要求甚麼？

它要求分母為正：$H - (a+b)\tan\alpha > 0$。代入 $\tan\alpha$ 的公式，

$$\begin{aligned} H - (a+b)\tan\alpha &= H - \frac{2a+b}{a}H + \frac{(a+b)^2}{ab}h \\ &= -\frac{a+b}{a}H + \frac{(a+b)^2}{ab}h = \frac{a+b}{a}\left[\frac{(a+b)h}{b} - H\right]. \end{aligned}$$

由於 $(a+b)/a > 0$，上式為正當且僅當

$$H < \frac{(a+b)h}{b}.$$

要使 $\tan\alpha > 0$，我們需要

$$\frac{2a+b}{a(a+b)}H > \frac{a+b}{ab}h \quad\Longleftrightarrow\quad H > \frac{(a+b)^2 h}{b(2a+b)},$$

這裏兩邊乘以了正數 $a(a+b)/(2a+b)$。

兩個條件合起來就是

$$\boxed{\frac{(a+b)^2}{b(2a+b)}h \;<\; H \;<\; \frac{a+b}{b}h}$$

反過來，在這個範圍內的任何 $H$ 都給出合理的 $\alpha$ 和 $v$。這個區間非空，因為 $\dfrac{a+b}{2a+b} < 1$。

兩個界限都有清晰的意義。上界是這樣的一個高度：由着地點經過網頂的直線，與發球者所在的鉛垂線相交之處。重力使路徑向下彎曲，所以球必須從這條直線下方出發（在 $H = (a+b)h/b$ 時，我們需要無限大的速率）。下界則對應 $\alpha = 0$ 的情況，即水平發球；若從比這更低的位置發球，球就必須向上擊出，才能越過球網而仍然落在指定的着地點。

## 驗算

- 取 $a = 12\,\text{m}$、$b = 6\,\text{m}$ 及 $h = 1\,\text{m}$，範圍為 $1.8\,\text{m} < H < 3\,\text{m}$。當 $H = 1.8$ 時，公式給出 $\tan\alpha = \frac{30}{216}(1.8) - \frac{18}{72} = 0$，與下界應有的結果一致。
- 在範圍內隨機選取 $a$、$b$、$h$ 和 $H$，用兩條公式算出 $\alpha$ 和 $v$，再以數值方法逐步模擬運動，結果球每次都經過網頂，並落在 $x = a + b$ 處（就精確路徑而言，相對誤差低於 $10^{-14}$）。
- 量綱（dimensions）：$\tan\alpha$ 的每一項都是長度除以長度，而 $v^2$ 的量綱是 $g\times$ 長度，正如所料。

## 常見錯誤

- 因角度向下而弄錯正負號：初始鉛垂速度是 $-v\sin\alpha$，而 $(*)$ 中的 $x\tan\alpha$ 一項是減去的。
- 寫到「$v^2 > 0$」就停下來，沒有留意到這其實是對分母的條件；要代入 $\tan\alpha$ 之後，它才變成對 $H$ 的條件。

## STEP 之外

在這題中，是兩個邊界條件（球網和着地點）決定了發射條件，而不是反過來：這是一個簡單的*邊值問題*（boundary-value problem），也是以數值方法求解微分方程（differential equations）的「打靶法」（shooting methods）背後的想法。一旦考慮空氣阻力和旋轉，方程就不再有閉合形式（closed-form）的解，那時正正要用這種方法來處理。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）討論了帶阻力的拋體運動，以及更多其他課題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。