詳細解答

STEP II 1997，第 10 題

力學 • 爆炸與彈性碰撞

> **STEP II 1997，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q10

關鍵思路

把每個速度分解成沿軸的分量和垂直於軸的分量。圓柱面是光滑的，所以它只能沿徑向施力：它永遠不會改變軸向速度，而彈性反彈只是把橫向速度反轉。爆炸時的動量守恆（conservation of momentum）迫使兩塊碎片沿同一條直徑飛開，於是整個問題就變成兩面牆之間的一維運動，軸向運動只是順帶跟着走。

解答

建立模型

把碎片當作質點（particle）（它們很小），圓柱視為光滑而固定，並按題目指示忽略重力。取 z 軸沿圓柱的軸，並設爆炸在時間 $t = 0$ 發生於原點。

緊接爆炸之後，把質量為 qM 的碎片的速度寫成軸向分量 w_1 加上橫向分量 $\mathbf{u}_1$（垂直於軸），質量為 $(1-q)M$ 的碎片則同樣寫成 w_2、$\mathbf{u}_2$。爆炸期間沒有外力作用，所以動量守恆：

$$qMw_1 + (1-q)Mw_2 = Mv, \qquad qM\mathbf{u}_1 + (1-q)M\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}.$$

第二條方程說明兩個橫向速度方向相反，所以兩塊碎片沿同一條直徑、以相反方向離開軸。把這條直徑稱為 x 方向，碎片 1（質量 qM）以速率 u_1 向 $x = +L$ 運動，碎片 2 以速率 u_2 向 $x = -L$ 運動，其中

$$qu_1 = (1-q)u_2. \tag{1}$$

由於 $q \le \frac{1}{2}$，我們有 $u_1 \ge u_2$：較輕的碎片較快。

每塊碎片都是正面撞向牆壁（它沿半徑運動），所以光滑牆壁的衝量（impulse）沿該半徑方向。這會把橫向速度反轉（反彈是完全彈性的），而軸向速度則不受影響。因此每塊

碎片一直沿同一條直徑運動，而它的軸向速度自始至終保持不變。

證明 $q = \frac{3}{8}$

軸向運動。軸向位置為 $z_1 = w_1 t$ 和 $z_2 = w_2 t$。兩塊碎片在某個時間 $t > 0$ 相遇，所以 $w_1 = w_2$，再由動量方程得 $w_1 = w_2 = v$。兩塊碎片都與原來的物體本應到達的位置並肩前進。

橫向運動。碎片 1 在 $t = L/u_1$ 到達 $x = L$，然後折返，所以反彈之後

$$x_1 = L - u_1\left(t - \frac{L}{u_1}\right) = 2L - u_1 t.$$

同理，碎片 2 反彈之後位於 $x_2 = -2L + u_2 t$。它們在兩者都反彈之後才碰撞，所以由 $x_1 = x_2$ 得

$$t = \frac{4L}{u_1 + u_2}, \qquad x = 2L - \frac{4Lu_1}{u_1 + u_2} = 2L\,\frac{u_2 - u_1}{u_1 + u_2}.$$

由 (1)，$u_2 = \frac{q}{1-q}u_1$，所以 $u_1 + u_2 = \frac{u_1}{1-q}$ 及 $u_2 - u_1 = \frac{(2q-1)u_1}{1-q}$。因此碰撞點為

$$x = 2L(2q - 1).$$

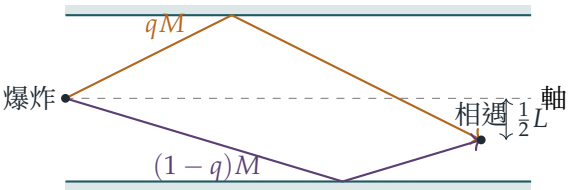
我們需要 $|x| = \frac{1}{2}L$，所以 $2q - 1 = \pm\frac{1}{4}$，得 $q = \frac{5}{8}$ 或 $q = \frac{3}{8}$。由於 $q \le \frac{1}{2}$，

$$q = \tfrac{3}{8},$$

正如所求。碰撞發生在 $x = -\frac{1}{2}L$，位於軸的較重碎片那一側。

想一想 這真的是第一次相遇，而且兩者都剛好各反彈了一次嗎？

當 $q = \frac{3}{8}$ 時，由 (1) 得 $u_2 = \frac{3}{5}u_1$。碎片 1 在 $t = L/u_1$ 反彈，碎片 2 在 $t = \frac{5}{3}L/u_1$ 反彈，而碰撞時間為 $4L/(u_1 + u_2) = \frac{5}{2}L/u_1$，比兩者都遲。它們會否更早相遇？在碎片 1 反彈之前，兩者正在互相遠離；而碎片 1 在回程中要到 $t = 2L/(u_1 - u_2) = 5L/u_1$ 才會追上碎片 2，那時碎片 2 早已掉頭。所以我們找到的相遇就是第一次相遇，而每塊碎片都剛好反彈了一次。



圖中所示是包含軸和該公共直徑的平面（軸向為橫向）；此圖按 $q = \frac{3}{8}$ 及下文求得的速率依比例繪畫。

爆炸所給予的能量

碰撞時間為

$$t = \frac{4L}{u_1 + u_2} = \frac{4L(1-q)}{u_1} = \frac{5L}{2u_1}.$$

令它等於 $5L/v$，得 $u_1 = \frac{1}{2}v$，於是 $u_2 = \frac{3}{5}u_1 = \frac{3}{10}v$。

軸向速度維持在 v 不變，所以爆炸中所增加的動能（kinetic energy）純粹是橫向動能：

$$\begin{aligned}\Delta E &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{8}M(\tfrac{1}{2}v)^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{8}M(\tfrac{3}{10}v)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}Mv^2\left(\tfrac{3}{32} + \tfrac{9}{160}\right) = \tfrac{1}{2}Mv^2\cdot\tfrac{3}{20} = \frac{3Mv^2}{40}.\end{aligned}$$

合併後的速度

緊接碰撞之前，每塊碎片的橫向速度都已因反彈而反轉：碎片 1 的橫向動量為 $-qMu_1$，碎片 2 的為 $+(1-q)Mu_2$。由 (1)，兩者之和為零。軸向動量為 $qMv + (1-q)Mv = Mv$。合併（coalescence）過程中動量守恆，所以質量為 M 的合併體的速度為

$$v，沿軸的方向,$$

與原來的物體相同，但它沿着一條與軸平行、距離軸 $\frac{1}{2}L$ 的直線運動。來自爆炸的 $\frac{3}{40}Mv^2$ 能量在合併中全部損失。

驗算

- $q = \frac{1}{2}$ 給出 $x = 0$：兩塊相等的碎片互為鏡像，必定在軸上相遇，合乎預期。
- 取 $L = v = 1$，$u_1 = 0.5$ 及 $u_2 = 0.3$：當 $t = 5$ 時，碎片 1 位於 $2 - 0.5\times 5 = -0.5$，碎片 2 位於 $-2 + 0.3\times 5 = -0.5$。一個在 $x = \pm 1$ 處設有反射的逐步時間模擬，重現了兩者各反彈一次後在 $t = 5.000$、$x = -0.500$ 相遇的結果。
- 最終的橫向動量為 $-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{10} = 0$，所以最終速度純粹是軸向的。

常見錯誤

- 讓牆壁改變了軸向速度。光滑的牆壁只會施加法向（徑向）力。
- 忘記反彈會把橫向動量反轉。總橫向動量要待兩塊碎片都反彈之後才回復為零。
- 保留 $q = \frac{5}{8}$：那是把兩塊碎片的標號對調後的同一個情況，已被 $q \le \frac{1}{2}$ 排除。

STEP 之外

把運動分解成沿對稱方向和垂直於對稱方向的分量，是一個重要思想的開端：系統的一種對稱性（symmetry）會帶來一個守恆量（conserved quantity）。這裏圓柱沿其長度處處看來都一樣，所以即使有牆壁存在，軸向動量仍然守恆（諾特定理（Noether's theorem）把這一點說得精確）。本題亦顯示，爆炸之後接着一次完全非彈性碰撞（perfectly inelastic collision），可以把能量以熱的形式交還，而軸向運動卻絲毫不受影響，照樣繼續。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）正是以這種方式闡述動量和質心（centre of mass）運動。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。