詳細解答

STEP II 1997，第 1 題

純數學 • 數字和與計數

> **STEP II 1997，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q1

關鍵思路

不要把這些數逐一列出：先數清楚有多少個，再把每個位值（place value）的貢獻分開相加。在末三個數位上，每個可用的數字出現的次數都相同，所以這些和幾乎不用怎樣計算就出來了。更妙的是，這裏有一種對稱性（symmetry）：把每個數字 d 換成 $7-d$，就會把 $0 \leftrightarrow 7$ 和 $2 \leftrightarrow 5$ 互換，於是這些數可以兩兩配對，每對的和都相同，因數分解（factorisation）也隨即得出。

解答

哪些數符合條件？

介乎 1000 與 6000 之間而符合條件的數有四個數位，而它的千位數字必定是 $0, 2, 5, 7$ 其中之一。千位不可以是 0（否則不足四位），也不可以是 7（否則這個數會超過 7000）。所以千位數字是 2 或 5，而由 2000 至 5777 之間按此方式組成的每一個數都在範圍之內。兩個端點 1000 和 6000 本身含有數字 1 和 6，所以「之間」是否包括端點並無影響。

其餘三個數位各自可以獨立地取四個可用數字中的任何一個。所以共有

$$2 \times 4 \times 4 \times 4 = 128$$

個數。

按位值相加

千位。這 128 個數之中有一半，即 64 個，以 2 開首，另外 64 個以 5 開首。千位數字的貢獻是

$$64 \times (2+5) \times 1000 = 448\,000.$$

百位、十位和個位。固定其中一個數位。四個數字各自恰好在 $128/4 = 32$ 個數的這個數位上出現，因為不論這個數位上放的是哪個數字，其餘數位的選法數目都相同。因此這個數位上的數字總和是 $32 \times (0+2+5+7) = 32 \times 14 = 448$。這三個數位的權重分別是 100、10 和 1，所以它們合共的貢獻是

$$448 \times (100+10+1) = 448 \times 111 = 49\,728.$$

相加之後，所求的和是

$$S = 448 \times 1000 + 448 \times 111 = 448 \times 1111 = 497\,728.$$

寫成質數的乘積

我們有 $448 = 64 \times 7 = 2^6 \times 7$，以及 $1111 = 11 \times 101$，其中 101 是質數（prime）（它不能被 2、3、5 或 7 整除，而且 $11^2 > 101$）。因此

$$S = 2^6 \times 7 \times 11 \times 101.$$

想一想 有沒有方法可以不必逐個位值記帳，就看出答案？

有。如果 n 符合條件，那麼 $7777 - n$ 也符合條件：從 7777 逐位相減時不需要借位，而且每個數字 d 都會變成 $7-d$，這個變換把 $\{0,2,5,7\}$ 映射到它自身，並把首位數字 2 和 5 互換。所以這 128 個數可分成 64 對，每對的和都是 7777（沒有任何數會與自己配對，因為 7777 是奇數）。因此

$$S = 64 \times 7777 = 2^6 \times 7 \times 1111 = 2^6 \times 7 \times 11 \times 101,$$

與上面的計算結果一致。

驗算

用電腦在 1000 至 6000 之間作簡短的搜尋，可找到恰好 128 個符合條件的數，其和為 497 728，而 $2^6 \times 7 \times 11 \times 101 = 64 \times 7777 = 497\,728$。再從大小上檢查是否合理：符合條件的數的平均值是 $7777/2 = 3888.5$，正好穩穩落在 2000 至 5777 這個範圍的中間。

常見錯誤

- 容許 7 作為首位數字（得出超過 6000 的數），或者忘記 0 不可以放在首位。
- 以為每個數字在千位上也出現 128/4 次：千位上只會出現 2 和 5，各 64 次。
- 停在 497 728 或 448×1111，沒有把 1111 分解成 11×101。

STEP 之外

數算每個數字在每個數位上出現多少次，是算兩次（double counting）論證最簡單的例子：把同一個量按兩種次序求和，這裏就是按數和按數位。$7777 - n$ 的配對是一種對稱性論證，高斯（Gauss）的公式 $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ 也可以用同類的論證得出。數字取自某個固定集合的數，以及它們的和，是初等數論（elementary number theory）和組合數學（combinatorics）中的常見題材；Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（高等算術）是很值得一讀的下一步。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。