詳細解答

STEP I 1997，第 9 題

力學 • 相對速度

> **STEP I 1997，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q9

關鍵思路

站在路邊看，一切都在移動；但從車上看，一切都是靜止的：汽車變成一排固定的方塊，方塊之間有長度為 c 的空隙，而小雞則以牠的相對速度（relative velocity）沿直線走過去。小雞要順利通過，唯一的條件是：當牠身處闊度為 a 的行車線內時，牠（相對於汽車）的橫向漂移不超過空隙長度 c。單憑這一個條件就能得出所求的不等式，而最小速率則來自求 $c\sin\theta + a\cos\theta$ 的最大值，這是標準的 $R\cos(\theta - \alpha)$ 做法。

解答

我們把小雞看成質點（particle），把汽車看成以速率 V 移動的長方形，每輛車都佔據橫跨道路、闊度為 a 的同一條帶狀區域。取 x 軸沿道路指向車流方向，y 軸橫跨道路，於是小雞的速度是 $(u\cos\theta,\, u\sin\theta)$，其中 $0 < \theta < \pi$。只有汽車所在的那條帶狀區域才需要考慮：在道路的其他地方，小雞毫無危險。

不等式

相對於汽車，小雞的速度是

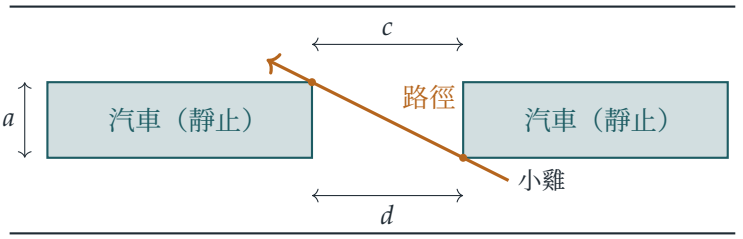
$$\mathbf{w} = (u\cos\theta - V,\ u\sin\theta).$$

在汽車的參考系（frame of reference）中，汽車靜止不動，小雞則以恆定速度 $\mathbf{w}$ 沿直線運動。牠橫過闊度為 a 的帶狀區域所需的時間是

$$\tau = \frac{a}{u\sin\theta}$$

而在這段時間內，牠（相對於汽車，逆着車流方向）向後滑移了

$$d = (V - u\cos\theta)\,\tau = \frac{a(V - u\cos\theta)}{u\sin\theta}.$$



圖中所示的是極端情況 $d = c$，此時路徑剛好沿着空隙的對角線。

想一想 為甚麼漂移量 d 最多只能是 c？

在汽車的參考系中，小雞穿過帶狀區域的路徑沿道路方向覆蓋了長度為 $|d|$ 的一段，而這一段上的每一點，小雞都會在行車線內的某個高度經過。靜止的汽車之間只留下長度為 c 的空隙，所以整段必須容納在同一個空隙之內：$|d| \le c$。（反過來說，若 $|d| \le c$，小雞可以選擇適當的出發時刻，使這一段落在某個空隙之內，從而安全橫過。）

特別地，$d \le c$，即

$$a(V - u\cos\theta) \le c\,u\sin\theta, \qquad \text{所以} \qquad Va \le u\,(c\sin\theta + a\cos\theta).$$

左邊是正數，所以凡是安全的橫過方式都有 $c\sin\theta + a\cos\theta > 0$，我們可以把它除過去：

$$u \ge \frac{Va}{c\sin\theta + a\cos\theta},$$

這正是所要證明的。（條件的另一半 $d \ge -c$，是防止跑得快的小雞越過空隙而撞上前面的汽車；它在下面求最小值的過程中不起作用。）

最小速率與橫過時間

寫成 $c\sin\theta + a\cos\theta = \sqrt{a^2 + c^2}\,\cos(\theta - \alpha)$，其中 α 是滿足以下條件的銳角：

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \qquad \tan\alpha = \frac{c}{a}.$$

所以 $c\sin\theta + a\cos\theta \le \sqrt{a^2 + c^2}$，等號僅在 $\theta = \alpha$ 時成立。因此對每一個方向都有

$$u \ge \frac{Va}{c\sin\theta + a\cos\theta} \ge \frac{Va}{\sqrt{a^2 + c^2}},$$

而當 $\theta = \alpha$ 且 $u = Va/\sqrt{a^2 + c^2}$ 時，兩個不等式都取等號。這個選擇確實是安全的：它恰好給出 $d = c$（即圖中由一角到對角的路徑），而且 $-c \le d \le c$ 成立。所以最小可能的勻速率是 $Va/\sqrt{a^2 + c^2}$，方向角為 $\alpha = \arctan(c/a)$。

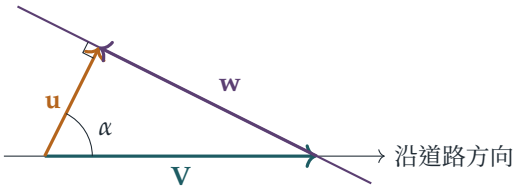
小雞以橫跨道路方向的速度分量 $u\sin\alpha$ 走過整個路闊 b，所以所需時間是

$$\frac{b}{u\sin\alpha} = b\cdot\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{Va}\cdot\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c} = \frac{b\,(a^2+c^2)}{Vac} = \frac{b}{V}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right),$$

這就是所求的結果。

想一想 為甚麼最小速率出現在 $\tan\theta = c/a$ 的時候？

看看各個速度。小雞的速度是 $\mathbf{u} = \mathbf{V} + \mathbf{w}$，而在最理想的情況下，相對速度 $\mathbf{w}$ 沿着空隙的對角線，方向為 $(-c, a)$。所以 $\mathbf{u}$ 的末端落在經過 $\mathbf{V}$ 的末端、沿該方向的直線上，而最短的 $\mathbf{u}$ 就是由原點到這條直線的垂線。它的方向 (a, c) 與道路成 $\arctan(c/a)$ 的角，而它的長度是 $V\sin(\text{對角線的傾角}) = Va/\sqrt{a^2+c^2}$。



驗算

- 單位：$Va/\sqrt{a^2+c^2}$ 是速率，而 $\frac{b}{V}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$ 是長度除以速率，即時間。
- 極限情況：若 $\theta = \frac{\pi}{2}$（垂直橫過），所得的界是 $u \geq Va/c$：小雞必須在一個空隙經過所需的時間 c/V 內走過闊度 a。這顯然是對的。
- 數值：取 $a = 1$，$c = 2$，$V = 2$，$b = 5$，最小速率是 $2/\sqrt{5} \approx 0.894$，此時 $\tan\theta = 2$，而橫過時間是 $\frac{5}{2}\left(2+\frac{1}{2}\right) = 6.25$。在道路參考系中直接模擬汽車和小雞的運動，結果與此吻合：以這個速率的 1.01 倍能找到安全的出發時刻，以 0.99 倍則找不到。

常見錯誤

- 在安全條件中使用橫過整條道路的時間 $b/(u\sin\theta)$。其實只有身處闊度為 a 的行車線內的那段時間才有關係。
- 弄錯相對速度的正負號：相對於汽車，小雞沿道路方向的速度是 $u\cos\theta - V$，而不是 $u\cos\theta + V$。

STEP 之外

轉換到障礙物靜止的參考系，是一個伽利略變換（Galilean transformation）；選取令問題變成靜態的參考系，是力學中最有用的習慣之一。這裏求最小值的過程也是一個小型的最優化（optimisation）問題：由一點到一條直線的最短向量就是垂線，你日後會在線性代數（linear algebra）中以正交投影（orthogonal projection）的形式再次遇上它。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）中有很多這類關於相對運動的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。